SELECCION DE PROBLEMAS RESUELTOS · SERIE LIMUSA

cálculo de varias variables

L. MARDER

LIMUSA

Esta Serie tiene por objeto ofrecer a los lectores una buena selección de problemas resueltos sobre distintos temas de matemáticas. Los primeros volúmenes se prepararon especialmente para satisfacer las necesidades de los alumnos que inician sus estudios profesionales en las carreras de matemáticas, ingeniería y ciencias, mientras que los últimos contienen algunos temas más difíciles. A fin de dejar el mayor espacio posible para los problemas, los textos explicativos y teóricos se redujeron a lo indispensable; también se cuidó de presentar en cada libro sólo los temas que pudieran cubrirse completamente.

Los libros se han escrito para usarlos como complemento de los cursos impartidos con textos convencionales. Son de gran utilidad para el estudiante, porque le ayudan a entender los problemas planteados en clase y adquirir práctica al resolver los problemas con respuestas que se agregaron con este propósito.

CALCULO DE VARIAS VARIABLES

El original inglés de esta obra se publicó
como el Volumen 2 de la colección

PROBLEM SOLVERS

a cargo de L. Marder, Profesor Titular de Matemáticas
de la Universidad de Southampton, Inglaterra.

SERIE:
LIMUSA
SELECCION DE PROBLEMAS RESUELTOS

CALCULO DE VARIAS VARIABLES

Volumen 2

L. MARDER,

Profesor Titular de Matemáticas,
Universidad de Southampton,
Inglaterra.

EDITORIAL LIMUSA
MEXICO 1974

Título de la obra en inglés:
CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES
© George Allen & Unwin Ltd, 1971

Versión española:
RICARDO VINÓS

Revisión:
JOSÉ HERNÁN PÉREZ CASTELLANOS
Ingeniero Industrial
Profesor Titular de Matemáticas de la
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica
y Eléctrica del Instituto Politécnico
Nacional de México.

Derechos reservados en lengua española,
© 1974, EDITORIAL LIMUSA, S. A.
Arcos de Belén 75, México 1, D. F.
Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial, Registro Núm. 121.

Primera edición: 1974

Impreso en México

(878)

Contenido

CAPITULO 1. DERIVACION PARCIAL 7

1.1 Definiciones, 7
1.2 Derivadas parciales, 10
1.3 Funciones compuestas; la regla de la cadena, 15
1.4 Diferenciales, 25

CAPITULO 2. JACOBIANOS Y TRANSFORMACIONES 33

2.1 Funciones implícitas y jacobianos, 33
2.2 Dependencia funcional, 38
2.3 Propiedades de los jacobianos, 42
2.4 Transformaciones, 44

CAPITULO 3. EL TEOREMA DE TAYLOR Y SUS APLICACIONES 53

3.1 El teorema de Taylor en dos variables, 53
3.2 Máximos y mínimos, 58
3.3 Restricciones; multiplicadores indeterminados, 67
3.4 Envolventes, 70

CAPITULO 4. INTEGRALES MULTIPLES 75

4.1 Integrales dobles y repetidas, 75
4.2 Transformaciones de las integrales dobles, 81
4.3 Integrales triples, 86
4.4 Transformaciones de las integrales triples, 89

CAPITULO 5. INTEGRALES DE LINEA Y DE SUPERFICIE 97

5.1 Integrales de línea, 97
5.2 El teorema de Green en el plano, 104
5.3 Integrales de superficie, 107

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS 117

INDICE 121

CAPITULO 1

Derivación parcial

1.1 Definiciones Un *conjunto* es cualquier colección de objetos definidos por alguna propiedad; los objetos se llaman *miembros* o *elementos* del conjunto. Denotaremos por $\mathbf{R}$ el conjunto de los números reales, el cual podemos considerar como el conjunto de los puntos sobre una recta (el *eje real*). Llamamos *intervalo cerrado* a un conjunto de números reales x que satisfacen la relación $a \leqslant x \leqslant b$; si la relación es $a < x < b$ obtenemos un *intervalo abierto*. Si c es un número real cualquiera, el conjunto de puntos sobre el eje real cuya distancia euclidiana desde c es menor que δ, donde $\delta > 0$, se llama *vecindad* de c, es decir, la relación $|x - c| < \delta$ define una vecindad de c.

Denotaremos por $\mathbf{R}^2$ el conjunto de pares de números reales (x, y), el cual podemos considerar como el conjunto de los puntos en un plano. Una *vecindad* (circular) de (a, b) es un conjunto de puntos, en el plano, cuya distancia euclidiana desde (a, b) es menor que δ, donde $\delta > 0$, o sea, se define una vecindad de (a, b) mediante una desigualdad $(x - a)^2 + (y - b)^2 < \delta^2$. Un conjunto de puntos es *abierto* cuando cada punto P en el conjunto posee una vecindad totalmente contenida en el conjunto. Por ejemplo, el conjunto $S : x^2 + y^2 < 1$ es abierto, pero el conjunto $T : x^2 + y^2 \leqslant 1$ no lo es, debido a que las vecindades de los puntos $x^2 + y^2 = 1$ contienen puntos que no pertenecen a T. En un conjunto, un *punto frontera* se caracteriza por la condición de que todas sus vecindades contienen puntos que pertenecen y puntos que no pertenecen al conjunto. Los puntos para los cuales $x^2 + y^2 = 1$ son puntos frontera tanto de T como de S. Un conjunto como T, que contiene todos sus puntos frontera, es *cerrado*.

Por *región* entenderemos un conjunto abierto o un conjunto abierto con algunos o todos sus puntos frontera. (Comúnmente se refuerza esta definición diciendo que una región no puede consistir de partes ajenas.)

Una *función* es una regla de correspondencia entre dos conjuntos que asocia uno o más elementos del segundo conjunto con cada uno de los miembros del primero. Si el primer conjunto es $\mathbf{R}^2$ y el segundo es $\mathbf{R}$, entonces cada par de números reales (x, y) se asocia con uno o más números reales, $F(x, y)$. Cuando $z = F(x, y)$ tiene precisamente un valor para cada par (x, y), entonces decimos que la regla (y también el valor, $F(x, y)$, lo cual no deja de ser un poco ambiguo) es una *función de valor único* de las variables x y y. Por ejemplo, $z = x^2 + y^2$ representa una función de valor único, mientras que $z^2 = |x + y|$ es una función *de valores múltiples,* pues a los valores de x y y cuya suma es distinta de cero corresponden más de un valor de z. En condiciones normales, entenderemos por la palabra función una regla de valor único.

Llamaremos aquí variables *independientes* a las variables x, y, y z será la variable *dependiente*. Los puntos (x, y) para los cuales $F(x, y)$ está definida constituyen el *dominio de definición* de la función; por ejemplo, si $F(x, y) = x^2 + y^2$, el dominio de definición es todo el plano xy; en cambio, si $F(x, y) = \sqrt{(x - y)}$, el dominio de definición es la región $x \geqq y$. Podemos identificar un punto en el espacio tridimensional con cada combinación posible de los valores (x, y, z), mediante un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares $Oxyz$. En general, esta *representación gráfica* de una función de dos variables crea una superficie.

Supongamos que $F(x, y)$ es una función definida en una vecindad de (a, b), con la posible salvedad del mismo (a, b). Si podemos aproximar $F(x, y)$ tanto como se quiera a un valor definido l con tan sólo escoger puntos (x, y) suficientemente próximos a (a, b) pero no en (a, b)), entonces decimos que $F(x, y)$ *tiende al límite* l *cuando* (x, y) *tiende a* (a, b). Reviste importancia que l no dependa de la dirección de (x, y) respecto de (a, b). Con más formalidad, escribimos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} F(x, y) = l,$$

si, para cualquier número $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que

$$|F(x,y) - l| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < (x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta^2.$$

Se dice que la función es *continua* en (a, b) cuando está definida en este punto y cuando $F(a, b) = l$. Por ejemplo, la función cuyo valor es cero en todos los puntos menos en $(0, 0)$, donde tiene el valor 1, posee un límite cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$. Empero tal límite es cero, no 1, así que la función es discontinua allí, porque $F(0, 0) \neq 0$.

Muchos teoremas importantes se aplican a funciones continuas en todos los puntos de una región. La suma, producto, cociente, etc., de dos funciones continuas son todos continuos, con la suposición, para los cocientes, de no anularse el denominador. Las funciones compuestas formadas exclusivamente de funciones continuas, también son continuas y así sucesivamente. Estos teoremas son generalizaciones de resultados en el cálculo de una variable; los enunciados precisos pueden encontrarse en casi todos los textos sobre cálculo avanzado.

Problema 1.1 Si

$$f(x, y) = \frac{x^2(x+y)}{x^2+y^2}, \quad g(x, y) = \frac{x^2-y^2+2x^3}{x^2+y^2},$$

cuando $(x, y) \neq (0, 0)$, demostrar que, en $(0, 0)$: (i) f es continua si $f(0, 0) = 0$; (ii) g no es continua, al margen del modo en que se defina $g(0, 0)$.

Solución. (i) Supongamos que x y y no son simultáneamente cero. Como $x^2 \leqq x^2 + y^2$,

$$|f(x, y)| = \frac{x^2}{x^2+y^2}\,|x+y| \leqq |x| + |y|.$$

Por lo tanto, si $\varepsilon > 0$, tenemos que $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$ cuando tanto $|x| < \frac{1}{2}\varepsilon$ como $|y| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Esto se cumple, sin duda, cuando $0 < x^2 + y^2 < \delta^2$, donde $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$. Por lo tanto, $f(x, y)$ tiende hacia cero cuando (x, y) tiende hacia $(0, 0)$, de modo que f es continua en este punto, siempre y cuando definamos $f(0, 0) = 0$.

(ii) Supongamos que $g(0, 0) = l$. Si g fuese continua en $(0, 0)$, entonces $g(x, y)$ debería aproximarse al valor de l al tender (x, y) a $(0, 0)$ a lo largo de cualquier recta. Pero en $y = 0$, $g = 1 + 2x$ $(x \neq 0)$, lo cual tiende a 1 cuando x se aproxima a cero; en cambio, en $x = 0$, $g = -1$ $(y \neq 0)$. El primer resultado requiere que $l = 1$, pero el segundo que $l = -1$. Siendo incompatibles ambos, deducimos que g no puede ser continua en el punto citado. □

1.2 Derivadas parciales Sea $z = f(x, y)$ una función (real) de las variables independientes (reales) x y y. Si mantenemos y en el valor constante y_1, entonces podremos considerar z como función de x. Si existe la derivada de $z = f(x, y_1)$ con respecto a x en $x = x_1$, la llamamos *derivada parcial* de f con respecto a x en el punto (x_1, y_1). Esto se denota por los diversos símbolos

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_1, y_1)}, \quad \text{ó} \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_1, y_1)}, \quad \text{ó} \quad f_x(x_1, y_1), \quad \text{ó} \quad z_x(x_1, y_1).$$

Definimos de manera semejante la derivada parcial con respecto a y.

En forma explícita, en (x_1, y_1), ponemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h, y_1) - f(x_1, y_1)}{h}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_1, y_1+k) - f(x_1, y_1)}{k}, \tag{1.2}$$

cuando existen tales límites.

Problema 1.2 Si $f(x, y) = x^2y^3 - 2y^2$, encontrar los valores de (i) $f_x(x, y)$, (ii) $f_y(x, y)$, (iii) $f_x(-2, 1)$, (iv) $f_y(-2, 1)$.

Solución. (i) Al considerar y como constante, derivamos con respecto a x, obteniendo

$$f_x(x, y) = 2xy^3.$$

(ii) Consideramos x como constante y derivamos con respecto a y:

$$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y.$$

Al tomar $x = -2$, $y = 1$, obtenemos

(iii) $f_x(-2, 1) = 2(-2)(1)^3 = -4.$

(iv) $f_y(-2, 1) = 3(-2)^2(1)^2 - 4(1) = 8.$ □

Problema 1.3 Demostrar que $z = \cos(x + y)$ es una solución de la *ecuación diferencial parcial*

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{1.3}$$

Encontrar una ecuación diferencial parcial que sea satisfecha, cuando $z = \cos xy$.

Solución. En el caso de $z = \cos(x + y)$, tenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\cos(x+y) = -\operatorname{sen}(x+y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\cos(x+y) = -\operatorname{sen}(x+y),$$

de donde

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{1.4}$$

Si $z = \cos xy$,

$$\partial z/\partial x = -y \operatorname{sen} xy, \quad \partial z/\partial y = -x \operatorname{sen} xy,$$

así que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

la cual es una ecuación diferencial parcial en z (es decir, una ecuación en donde intervienen las derivadas parciales de z).

Observe el lector que se cumple (1.3) cuando z es una función *arbitraria* de $x + y$ y que (1.4) se satisface cuando z es una función *arbitraria* de xy. □

Problema 1.4 Interpretar, desde el punto de vista geométrico, las derivadas parciales $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$, donde $z = f(x, y)$.

Solución. Considérese la superficie S cuyas coordenadas cartesianas rectangulares satisfacen la ecuación $z = f(x, y)$, donde tomamos el eje de las z vertical y dirigido hacia arriba (figura 1.1). La altura de esta superficie medida desde cualquier punto (x_1, y_1) en el plano $z = 0$ es $f(x_1, y_1)$, y su valor puede ser positivo o negativo. Sea P el punto $(x_1, y_1, f(x_1, y_1))$, situado en la curva plana vertical donde el plano $y = y_1$ se interseca con S. La pendiente de la tangente PQ a esta curva, en P y en la dirección en que crece x es $(\partial z/\partial x)_{(x_1, y_1)}$.

De la misma manera, la derivada parcial $\partial z/\partial y$ en (x_1, y_1) es la pendiente de la tangente PR, en P y en la dirección en que crece y, a la curva plana vertical, intersección del plano vertical $x = x_1$ y S. □

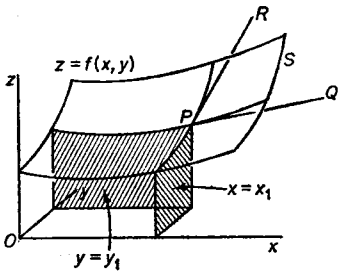

Figura 1.1

Problema 1.5 Si

$$f(x,y) = \begin{cases} xy/(x^2+y^2), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

demostrar que f no es continua en $(0, 0)$, pero que tanto f_x como f_y existen en el punto en cuestión.

Solución. A lo largo de la recta $x = cy$, $(c \neq 0)$,

$$f(x,y) = \frac{cy^2}{c^2y^2+y^2} = \frac{c}{c^2+y},$$

siempre y cuando $y \neq 0$. Por consiguiente, cuando el punto (x, y) se aproxima a $(0, 0)$ a lo largo de esta recta, $f(x, y)$ tiende al valor $1/c$. Como este valor depende de c, $f(x, y)$ no tiende a un límite único cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ (en *cualquier* dirección) y, por lo tanto, no es continua en este punto.

En casos como éste, no conviene derivar la fórmula correspondiente a f en un punto general y sustituir después los valores $x = 0$, $y = 0$. En cambio, trabajamos directamente con las definiciones (1.1) y (1.2):

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0,$$

lo cual demuestra que existen tanto f_x como f_y en $(0, 0)$, y cada una vale cero. □

Problema 1.6 Si $x = r \cos \theta$ y $y = r \operatorname{sen} \theta$, encontrar $\partial x/\partial r$ y $\partial r/\partial x$. ¿Por qué no se tiene idénticamente que

$$\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = 1?$$

Solución. Si consideramos r y θ como las variables independientes y derivamos la ecuación $x = r \cos \theta$ con respecto a r (con θ constante), obtenemos

$$\partial x/\partial r = \cos \theta. \tag{1.5}$$

La forma de notación $\partial r/\partial x$ es imprecisa, pues indica que x debe considerarse como una de las variables independientes pero no especifica la otra, es decir, no queda claramente establecido cuál debe considerarse constante cuando se deriva. Si se supone que x y y deben conservar la misma calidad en la segunda parte del problema, entonces éstas serán las variables independientes, y las dependientes serán r y θ. Al resolver las relaciones dadas, obtenemos

$$r = (x^2+y^2)^{1/2}, \quad \theta = \tan^{-1}(y/x). \tag{1.6}$$

Derivando la primera de las expresiones de (1.6) con respecto a x, manteniendo y constante (como indica la notación siguiente):

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y = x(x^2+y^2)^{-1/2} = \frac{x}{r} = \cos \theta. \tag{1.7}$$

Podemos escribir el producto de las ecuaciones (1.5) y (1.7) como

$$\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y = \cos^2 \theta.$$

lo cual no es idénticamente igual a 1. Esto era previsible, pues se mantuvieron como constantes variables diferentes al llevar a cabo las derivaciones sobre los miembros de la izquierda. □

Cuando $f(x, y)$ posee derivadas parciales f_x y f_y en alguna región, éstas serán funciones de x y y, de modo que pueden tener, a su vez, derivadas parciales con respecto a x y y, las cuales se conocen como *segundas derivadas parciales* de f, y se denotan por

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Problema 1.7 Encontrar las segundas derivadas parciales de la función $f(x, y) = x^3y + e^{xy}$.

Solución. Tenemos

$$f_x = 3x^2y + ye^{xy}, \qquad f_y = x^3 + xe^{xy}.$$

Por lo tanto, al derivar de acuerdo con las fórmulas anteriores, obtenemos

$$f_{xx} = 6xy + y^2e^{xy}, \qquad f_{xy} = 3x^2 + e^{xy} + xye^{xy},$$

$$f_{yx} = 3x^2 + e^{xy} + xye^{xy}, \quad f_{yy} = x^2e^{xy}.$$

Observe el lector que $f_{xy} = f_{yx}$. Esto no es cierto para toda función $f(x, y)$, pero la relación se cumple, en particular, cuando los dos miembros existen y son continuos en las inmediaciones del punto en cuestión, lo cual suele verificarse en casi todas las aplicaciones prácticas. □

Problema 1.8 Si $f(x, y) = x^2y^2/(x^2 + y^2)$, $(x, y) \neq (0, 0)$, demostrar que

(i) $xf_x + yf_y = 2f$,

(ii) $x^2f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2f_{yy} = 2f$.

Solución. (i) Encontramos con facilidad que

$$f_x = 2xy^2(x^2+y^2)^{-1} + x^2y^2\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)^{-1} = 2xy^4(x^2+y^2)^{-2},$$

y, por simetría,

$$f_y = 2x^4y(z^2+y^2)^{-2},$$

de donde

$$xf_x + yf_y = \frac{2x^2y^2(y^2+x^2)}{(x^2+y^2)^2} = 2f. \tag{1.8}$$

(ii) Al derivar parcialmente (1.8) con respecto a x y después con respecto a y obtenemos

$$xf_{xx}+f_x+yf_{xy} = 2f_x,$$
$$xf_{yx}+f_y+yf_{yy} = 2f_y.$$

Multiplicando la primera igualdad por x y la segunda por y, sumando y aplicando la relación $f_{xy} = f_{yx}$, obtenemos:

$$x^2f_{xx}+2xyf_{xy}+y^2f_{yy} = xf_x+yf_y = 2f,$$

para (i). □

Definimos las derivadas parciales de orden superior como extensión natural de las segundas derivadas. Por ejemplo,

$$f_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x}(f_{xx}), \quad f_{yxy} = \frac{\partial}{\partial y}(f_{xy}), \quad \text{etc.}$$

En condiciones adecuadas, no importa el orden de diferenciación, así que podemos escribir los subíndices en cualquier orden.

1.3 Funciones compuestas; la regla de la cadena

Problema 1.9 Si f y g son funciones arbitrarias de una variable, demostrar que

$$z = f(x-ct)+g(x+ct),$$

donde c es una constante, es una solución de la *ecuación de onda*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Solución. Sean $u = x - ct$, $v = x + ct$. Si mantenemos t constante y aplicamos un procedimiento estándar para derivar funciones compuestas de una variable,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[f(u)+g(v)] = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}+g'(v)\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$= f'(u)+g'(v),$$

donde el apóstrofo denota la derivación de una función con respecto a su argumento. Por lo tanto,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)\frac{\partial u}{\partial x} + g''(v)\frac{\partial v}{\partial x} = f''(u) + g''(v). \tag{1.9}$$

De la misma manera, si mantenemos x constante,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}[f(u) + g(v)] = f'(u)\frac{\partial u}{\partial t} + g'(v)\frac{\partial v}{\partial t} \\ &= -cf'(u) + cg'(v), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= (-c)^2 f''(u) + (c)^2 g''(v),\end{aligned} \tag{1.10}$$

así que, por (1.9), (1.10), concluimos que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0. \qquad \square$$

En general, si $w = f(x, y)$, donde x y y son funciones de las variables independientes r y s, entonces w es una función de r y s. Vamos a denotar por $\partial/\partial r$ la derivación con respecto a r, donde s es constante, y por $\partial/\partial s$ la derivación con respecto a s, donde r es constante. Como antes, la notación $\partial/\partial x$ y $\partial/\partial y$ significa que y y x son, respectivamente, constantes al derivar. La *regla de la cadena* de la derivación parcial afirma que

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}, \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.\end{aligned}$$

Si $w = f(x, y, z, \ldots)$, donde $x = x(r, s, t, \ldots)$, $y = y(r, s, t, \ldots)$, $z = z(r, s, t, \ldots)$, etc., entonces la regla correspondiente es

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} + \cdots,$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} + \cdots,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \cdots, \quad \text{etc.}$$

Aquí suponemos que los números de variables $x, y, z, \ldots$ y $r, s, t, \ldots$ son finitos, aunque no necesariamente iguales.

Problema 1.10 Sea $w = f(x, y) = e^{x(x-y)}$, donde $x = 2t \cos t$, $y = 2t \operatorname{sen} t$. Encontrar dw/dt cuando $t = \pi$.

Solución. Podemos sustituir x y y en términos de t y derivar, o bien podemos aplicar la regla de la cadena, con lo cual obtenemos (ya que w es función compuesta tan sólo de t):

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= (2x-y)\,e^{x(x-y)}(2\cos t - 2t \operatorname{sen} t) - xe^{x(x-y)}(2 \operatorname{sen} t + 2t \cos t).$$

Cuando $t = \pi$, $x = -2\pi$, $y = 0$, así que

$$dw/dt = (-4\pi)\,e^{4\pi^2}(-2) - (-2\pi)\,e^{4\pi^2}(-2\pi) = 4\pi(2-\pi)\,e^{4\pi^2}.$$

□

Problema 1.11 Si $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta$, (siendo ρ, θ coordenadas polares en el plano y x, y coordenadas rectangulares), demostrar que la ecuación de Laplace para $V(x, y)$,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

equivale a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0.$$

Solución. Primer método. Tenemos:

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} = \cos\theta \frac{\partial V}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial y}, \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\rho \operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial x} + \rho \cos\theta \frac{\partial V}{\partial y}. \tag{1.12}$$

Por lo tanto, podemos reemplazar $\partial/\partial\rho$ y $\partial/\partial\theta$ por las operaciones equivalentes:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial y}, \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = -\rho \operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial x} + \rho \cos\theta \frac{\partial}{\partial y}. \tag{1.14}$$

Por (1.11),

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\cos\theta \frac{\partial V}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial y}\right) \\ &= \cos\theta \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \rho}(\cos\theta) \\ &\quad + \operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \rho}(\operatorname{sen}\theta).\end{aligned} \tag{1.15}$$

Aplicamos ahora (1.13) a fin de reemplazar $\partial/\partial\rho$ tan sólo en los términos primero y tercero; en los otros dos términos podemos derivar directamente con respecto a ρ. (En efecto, como ρ y θ son variables independientes, tenemos que $(\partial/\partial\rho)\cos\theta = 0$, $(\partial/\partial\rho)\operatorname{sen}\theta = 0$.) Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} &= \cos\theta\left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &\qquad \frac{\partial V}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta\left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial V}{\partial y} \\ &= \cos^2\theta \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \operatorname{sen}^2\theta \frac{\partial^2 V}{\partial y^2},\end{aligned} \tag{1.16}$$

pues $\partial^2 V/\partial x\partial y = \partial^2 V/\partial y\partial x$. De la misma manera,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\rho \operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial x} + \rho \cos\theta \frac{\partial V}{\partial y}\right).$$

Pero

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(-\rho \operatorname{sen}\theta) = -\rho\cos\theta, \quad \frac{\partial}{\partial\theta}(\rho\cos\theta) = -\rho\operatorname{sen}\theta,$$

y de acuerdo con el procedimiento adoptado en (1.15) obtenemos, **al** aplicar (1.14),

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} &= -\rho\ \operatorname{sen}\ \theta\left(-\rho\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial x}+\rho\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial V}{\partial x}-\rho\cos\theta\frac{\partial V}{\partial x}\\ &\quad+\rho\cos\theta\left(-\rho\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial x}+\rho\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial V}{\partial y}-\rho\operatorname{sen}\theta\frac{\partial V}{\partial y}\\ &= \rho^2\left(\operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}+\cos^2\theta\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\\ &\quad-\rho\left(\cos\theta\frac{\partial V}{\partial x}+\operatorname{sen}\theta\frac{\partial V}{\partial y}\right).\end{aligned} \tag{1.17}$$

Por (1.11), (1.15),

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \tag{1.18}$$

de donde se deduce el resultado requerido.

Segundo método. *Tanto* si invertimos las ecuaciones $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\ \operatorname{sen}\theta$, para obtener $\rho = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, $\theta = \tan^{-1}(y/x)$, *como* si resolvemos (1.13), (1.14), encontramos que

$$\frac{\partial}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y}=\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}. \tag{1.19}$$

Al aplicar sucesivamente cada uno de estos operadores a V, podemos obtener expresiones para $\partial^2 V/\partial x^2$ y $\partial^2 V/\partial y^2$ en términos de ρ, θ y las derivadas de V (hasta de segundo orden) con respecto a estas variables. Al sumar las dos expresiones así obtenidas, llegamos, después de algunas reducciones, al primer miembro de (1.18), de donde nuevamente se deduce el resultado que se busca. El lector debe verificar los pormenores de lo dicho.

Observe el lector que es mejor no confiar en invertir relaciones dadas en problemas de este tipo; esto no siempre puede hacerse. Es preferible usar (1.13), (1.14) para deducir (1.19). En el siguiente problema se ofrece otro ejemplo del método. □

Problema 1.12 Si $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, encontrar $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial y$. Si $f = f(x, y)$, expresar $(\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2$ en términos de las derivadas parciales con respecto a u y v,

Solución. De acuerdo con la regla de la cadena, si $g(x, y)$ es cualquier función,

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{1.21}$$

En particular, cuando $g \equiv x$, encontramos, a partir de las relaciones dadas, que

$$1 = 2u\frac{\partial u}{\partial x} - 2v\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$0 = 2u\frac{\partial u}{\partial y} - 2v\frac{\partial v}{\partial y}.$$

De la misma manera, cuando $g \equiv y$,

$$0 = 2v\frac{\partial u}{\partial x} + 2u\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$1 = 2v\frac{\partial u}{\partial y} + 2u\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Resolviendo las últimas cuatro ecuaciones,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u}{2(u^2+v^2)}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-v}{2(u^2+v^2)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v}{2(u^2+v^2)}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{u}{2(u^2+v^2)}.$$

Sustituyendo estos valores en (1.20) y (1.21), y sustituyendo g por f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2(u^2+v^2)}\left(u\frac{\partial f}{\partial u} - v\frac{\partial f}{\partial v}\right), \tag{1.22}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2(u^2+v^2)}\left(v\frac{\partial f}{\partial u} + u\frac{\partial f}{\partial v}\right), \tag{1.23}$$

de donde

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{4(u^2+v^2)}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]. \qquad \square$$

Problema 1.13 Con la misma notación del último problema, encontrar $\partial^2 f/\partial x \partial y$ en términos de las derivadas de f con respecto a u y v, cuando $u = 2$, $v = 1$.

Solución. De (1.22) se deduce que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2(u^2+v^2)}\left(u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v}\right),$$

y aplicando este operador a (1.23), se tiene, cuando $u = 2$, $v = 1$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{10}\left(2\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)\left[\frac{1}{2(u^2+v^2)}\left(v\frac{\partial f}{\partial u} + u\frac{\partial f}{\partial v}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{20}\left[\left(2\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)\frac{1}{u^2+v^2}\right]\left(\frac{\partial f}{\partial u} + 2\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$+ \frac{1}{100}\left(2\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(v\frac{\partial f}{\partial u} + u\frac{\partial f}{\partial v}\right).$$

Observe el lector que hemos reemplazado u por 1 y v por 2 tan sólo en las funciones de u y v que aún no se han derivado.

Llevamos a cabo las derivaciones, sin olvidar que u y v son las variables independientes, para encontrar:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{20}\left[\frac{-4u+2v}{(u^2+v^2)^2}\right]\left(\frac{\partial f}{\partial u} + 2\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$
$$+ \frac{1}{100}\left[2v\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - v\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} - \frac{\partial f}{\partial u} + 2u\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2\frac{\partial f}{\partial v} - u\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right]$$
$$= \frac{1}{500}\left(10\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 15\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - 10\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - 11\frac{\partial f}{\partial u} - 2\frac{\partial f}{\partial v}\right). \quad \square$$

Problema 1.14 Encontrar la solución general de la ecuación de onda para $z(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0. \tag{1.24}$$

Solución. Denotemos por ∂_x, ∂_y las derivadas $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, y pongamos $u = x + ct$, $v = x - ct$. (Esta sustitución se sugiere a partir del problema 1.9.) Entonces, con el método de los problemas anteriores, tenemos:

$$\partial_x = u_x \partial_u + v_x \partial_v = \partial_u + \partial_v,$$
$$\partial_t = u_t \partial_u + v_t \partial_v = c(\partial_u - \partial_v),$$

así que, con una notación obvia para las segundas derivadas,

$$\partial_{xx} = (\partial_u + \partial_v)(\partial_u + \partial_v) = \partial_{uu} + 2\partial_{uv} + \partial_{vv},$$
$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt} = (\partial_u - \partial_v)(\partial_u - \partial_v) = \partial_{uu} - 2\partial_{uv} + \partial_{vv}.$$

Si restamos, podemos escribir (1.24) como

$$\partial^2 z/\partial u\, \partial v = 0.$$

La integración con respecto a u, considerando v como constante, da

$$\partial z/\partial v = F(v),$$

donde F es una función arbitraria. A continuación, integramos con respecto a v, para obtener

$$z = \int F(v)\, dv + f(u),$$

donde f es arbitraria. Por lo tanto, si ponemos $g(v)$ en lugar de la integral indefinida de la última ecuación, habremos obtenido la solución general de (1.24), en la cual intervienen dos funciones arbitrarias f y g:

$$z = f(x+ct) + g(x-ct). \qquad \square$$

Problema 1.15 Encontrar la solución de la *ecuación de onda esférica para* $z(r, t)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0, \tag{1.25}$$

de modo que $z = r^{-1} \operatorname{sen} r$ y $\partial z/\partial t = 0$ cuando $t = 0$.

Solución. Como

$$\partial_{rr}(rz) = \partial_r(rz_r + z) = rz_{rr} + 2z_r,$$
$$\partial_{tt}(rz) = \partial_t(rz_t) = rz_{tt},$$

encontramos que, al multiplicar por r, podemos dar a (1.25) la forma

$$[\partial_{rr} - (1/c^2)\partial_{tt}](rz) = 0.$$

De acuerdo con el problema anterior, la solución general de esta ecuación es

$$rz = f(r+ct) + g(r-ct), \tag{1.26}$$

donde f y g son arbitrarias. Aplicamos las condiciones dadas en $t = 0$, para obtener

$$(z)_{(t=0)} = r^{-1} \operatorname{sen} r = r^{-1}[f(r) + g(r)]$$

es decir,

$$f(r) + g(r) = \operatorname{sen} r, \tag{1.27}$$

y

$$(\partial_t z)_{(t=0)} = 0 = r^{-1}[f'(r+ct)(c) + g'(r-ct)(-c)]_{(t=0)}$$

o sea,

$$f'(r) - g'(r) = 0, \tag{1.28}$$

al derivar (1.26), donde el apóstrofo denota la derivación de una función con respecto a su argumento.

Observe el lector que en (1.28) no interviene t y las derivadas son ordinarias, no parciales. En consecuencia, podemos integrar para obtener

$$f(r) - g(r) = A = \text{const.} \tag{1.29}$$

Por (1.27), (1.29)

$$f(r) = \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} r + A), \qquad g(r) = \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} r - A),$$

y, por lo tanto, la solución que buscamos es, por (1.26),

$$\begin{aligned} z &= r^{-1}[f(r+ct) + g(r-ct)] \\ &= \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(r+ct) + \operatorname{sen}(r-ct)]. \end{aligned}$$

□

Si la función $f(x, y, z, \ldots)$ tiene la propiedad siguiente:

$$f(tx, ty, tz, \ldots) = t^n f(x, y, z, \ldots),$$

para valores generales de t, decimos que es *homogénea de grado n*. Por ejemplo,

$$f(x, y, z) = (x^3 + 3xy^2 - xz^2)/z$$

es homogénea de grado 2, porque, si $t \neq 0$,

$$\begin{aligned} f(tx, ty, tz) &= [(tx)^3 + 3(tx)(ty)^2 - (tx)(tz)^2]/tz \\ &= t^2(x^3 + 3xy^2 - xz^2)/z = t^2 f(x, y, z). \end{aligned}$$

Problema 1.16 Demostrar el *teorema de Euler*: si $f(x, y, z, \ldots)$ es homogénea de grado n, entonces

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial z} + \cdots = nf. \tag{1.30}$$

Verificar el resultado en el caso en que $f(x, y, z) = 2x^3 + yz^2 - xyz$.

Solución. Sean $X = tx$, $Y = ty$, $Z = tz, \ldots$. Entonces, por hipótesis,

$$f(X, Y, Z, \ldots) = t^n f(x, y, z, \ldots).$$

Derivamos cada miembro con respecto a t, para obtener

$$f_X\frac{dX}{dt} + f_Y\frac{dY}{dt} + f_Z\frac{dZ}{dt} + \cdots = nt^{n-1}f(x, y, z, \ldots),$$

es decir,

$$xf_X + yf_Y + zf_Z + \cdots = nt^{n-1}f(x, y, z, \ldots), \tag{1.31}$$

donde $f_X = (\partial/\partial X)f(X, Y, Z, \ldots)$, etc.

A continuación, pongamos $t = 1$, con lo cual $X = x$, $Y = y$, $Z = z$, y obtenemos, a partir de (1.31),

$$xf_x + yf_y + zf_z + \cdots = nf,$$

que es el resultado requerido.

La función dada es claramente homogénea de grado 3. Por cálculo directo,

$$\begin{aligned} xf_x+yf_y+zf_z &= x(6x^2-yz)+y(z^2-xz)+z(2yz-xy) \\ &= 6x^3-3xyz+3yz^2 = 3f, \end{aligned}$$

lo cual queríamos demostrar. □

En una generalización del teorema de Euler se afirma que (*ver* problema 1.8):

$$(x\partial_x+y\partial_y+\cdots)^m f(x, y, \ldots) = n(n-1)\ldots(n-m+1)f(x, y, \ldots),$$

cuando $m \leqslant n$.

1.4 Diferenciales Sea P el punto (x_1, y_1) y sea Q el punto $(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$, donde Δx y Δy son respectivamente incrementos en x y y. Sea R un punto variable $(x_1 + t\,\Delta x, y_1 + t\,\Delta y)$ sobre la recta PQ, donde t es un parámetro. Si P y Q son puntos fijos, entonces, para cualquier función $f(x, y)$,

$$F(t) \equiv f(x_1 + t\,\Delta x, y_1 + t\,\Delta y) \tag{1.32}$$

es función tan sólo de t. En virtud de un teorema del valor medio del cálculo de una variable, si existe la derivada de F en $0 \leqslant t \leqslant 1$, entonces

$$F(1) - F(0) = F'(k),$$

donde k es algún número con la propiedad de que $0 < k < 1$. Esta cantidad representa el incremento Δf en f entre P y Q, y derivando (1.32) obtenemos

$$\Delta f = f_x(x_1+k\,\Delta x, y_1+k\,\Delta y)\Delta x+f_y(x_1+k\,\Delta x, y_1+k\,\Delta y)\Delta y,$$

siempre y cuando estas derivadas existan. Si, además, son continuas, podemos escribir esta última ecuación como

$$\Delta f = (f_x+\varepsilon_1)\Delta x+(f_y+\varepsilon_2)\Delta y,$$

donde ahora evaluamos las derivadas parciales en (x_1, y_1), y ε_1 y ε_2 tienden ambos hacia cero cuando Δx y Δy tienden hacia cero.

La *parte principal* de este incremento es

$$df = f_x\,\Delta x + f_y\,\Delta y,$$

y, cuando Δx y Δy tienen valores pequeños, df es aproximadamente igual a Δf. df se llama *diferencial* de f, y cuando se usan los incrementos Δx y Δy en este contexto se denotan respectivamente por dx y dy. Por lo tanto,

$$df = f_x dx + f_y dy. \tag{1.33}$$

Esta fórmula es válida aun cuando x y y no sean las variables independientes, entonces se cambian ligeramente los significados de dx y dy (pues se convierten en partes principales). Por ejemplo, si $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, donde u y v son las variables independientes, entonces, en correspondencia con las diferenciales du, dv en u, v, tenemos

$$dx = x_u\,du+x_v\,dv, \quad dy = y_u\,du+y_v\,dv, \quad df = f_u\,du+f_v dv.$$

que satisfacen (1.33), porque

$$f_x x_u+f_y y_u = f_u, \quad f_x x_v+f_y y_v = f_v.$$

Las generalizaciones a funciones de más de dos variables son inmediatas.

Problema 1.17 (i) Encontrar df cuando $f(x, y) = x^2e^{2y}\cos xy$; (ii) encontrar $g(x, y)$ de modo que

$$dg = [2y^2(\operatorname{sen} x+x\cos x)-ye^{xy}]\,dx+(4xy\operatorname{sen} x-xe^{xy}+2y)\,dy. \tag{1.34}$$

Solución. (i) Por (1.33),

$$\begin{aligned} df &= e^{2y}[2x\cos xy+x^2(-y)\operatorname{sen} xy]\\ &\qquad dx+x^2[2e^{2y}\cos xy+e^{2y}(-x)\operatorname{sen} xy]\,dy\\ &= xe^{2y}[(2\cos xy-xy\operatorname{sen} xy)\,dx+x(2\cos xy-x\operatorname{sen} xy)\,dy]. \end{aligned}$$

(ii) Si existe una función $g(x, y)$ con la propiedad citada, entonces, al comparar (1.34) con (1.33) (con g en lugar de f), veremos que g debe satisfacer las condiciones

$$g_x = 2y^2(\operatorname{sen} x + x \cos x) - ye^{xy}, \tag{1.35}$$

$$g_y = 4xy \operatorname{sen} x - xe^{xy} + 2y. \tag{1.36}$$

Integramos (1.35) con respecto a x, manteniendo y constante, y obtenemos

$$g = 2y^2 x \operatorname{sen} x - e^{xy} + h(y),$$

donde la función h debe determinarse. Al sustituir en (1.36):

$$g_y = 4xy \operatorname{sen} x - xe^{xy} + h'(y) = 4xy \operatorname{sen} x - xe^{xy} + 2y,$$

de donde se tiene que $h'(y) = 2y$, es decir,

$$h(y) = y^2 + C,$$

donde C es una constante arbitraria. Por lo tanto,

$$g(x, y) = 2y^2 x \operatorname{sen} x - e^{xy} + y^2 + C. \qquad \square$$

Problema 1.18 Demostrar que no existe función alguna (con segundas derivadas parciales que sean continuas) cuya diferencial sea $xy\,dx + 2x^2\,dy$.

Solución. Consideremos cualquier función $f(x, y)$ con la diferencial

$$df = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy, \tag{1.37}$$

donde P y Q son funciones dadas. Por (1.33), debemos tener:

$$f_x = P, \quad f_y = Q.$$

Cuando f posee segundas derivadas parciales que son continuas, entonces $f_{xy} = f_{yx}$, de modo que

$$\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x \tag{1.38}$$

es una condición necesaria para que el segundo miembro de (1.37) sea la diferencial de alguna función f. En nuestro caso, $P = xy$, $Q = 2x^2$, y

$$P_y = x, \qquad Q_x = 2x,$$

o sea,

$$P_y \neq Q_x$$

(excepto cuando $x = 0$) con lo cual queda demostrada la proposición del problema.

Cuando (1.37) es válida para alguna función $f(x, y)$, se dice que la expresión $P\,dx + Q\,dy$ es una diferencial *exacta*. El resultado recíproco del que acabamos de deducir es el siguiente: cuando se verifica (1.38) en toda una región, la forma diferencial $P\,dx + Q\,dy$ es exacta (aunque quizá f no sea de valor único, a menos que la región sea *simplemente conexa*; véase la pág. 105). □

Problema 1.19 Interpretar desde el punto de vista geométrico Δf y df en el punto (x_1, y_1) para una función dada $f(x, y)$.

Solución. Consideremos la superficie S: $z = f(x, y)$ referida a los ejes cartesianos rectangulares $Oxyz$. Denotemos por P_0 y Q_0 los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) (eligiendo arbitrariamente el segundo) en el plano xy, y pongamos $z_1 = f(x_1, y_1)$, $z_2 = f(x_2, y_2)$, de modo que los puntos $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ están en S. Si $dx = \Delta x = x_2 - x_1$, $dy = \Delta y = y_2 - y_1$, el incremento correspondiente en f es

$$\Delta f = z_2 - z_1 = f(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y) - f(x_1, y_1),$$

es decir, Δf es el incremento en la altura de la superficie S desde el punto (x, y), cuando éste va desde P_0 hasta Q_0.

Consideremos a continuación el plano tangente a S en el punto $P(x_1, y_1, z_1)$, cuya ecuación, siendo lineal en x, y, z, debe ser de la forma

$$z - z_1 = l(x - x_1) + m(y - y_1). \tag{1.39}$$

Por inspección, l es la pendiente de la recta de intersección de este plano y el plano vertical $y = y_1$. La curva de intersección de S y el plano $y = y_1$ debe tener la misma pendiente, l, en P, así que

$$l = f_x(x_1, y_1), \quad m = f_y(x_1, y_1), \tag{1.40}$$

(obteniendo el segundo resultado con un argumento semejante).

Si sustituimos x, y por x_2, y_2, entonces, por (1.40), el segundo miembro de (1.39) se convierte en

$$f_x dx + f_y dy, \tag{1.41}$$

es decir, la diferencial df evaluada en (x_1, y_1). El primer miembro de (1.39) se convierte en

$$z'_2 - z_1, \tag{1.42}$$

donde z'_2 es la altura vertical desde Q_0 del plano tangente en P. Si igualamos (1.41), (1.42), obtenemos

$$df = z'_2 - z_1,$$

lo cual muestra que la diferencial df es el incremento en la altura del *plano tangente* en P cuando el punto base (x, y) va desde P_0 hasta Q_0.

Además, este resultado muestra que df y Δf son casi iguales, cuando los valores de dx y dy son pequeños. □

Problema 1.20 Si $f(x, y) = e^{x^2 y}$, encontrar un valor aproximado para $f(1.05, 0.97)$.

Solución. Escribimos $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, donde x_0 y y_0 son arbitrarios. Si Δx y Δy son suficientemente pequeños, tenemos que, aproximadamente,

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Tomamos $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $\Delta x = 0.05$, $\Delta y = -0.03$. Entonces, $f(x_0, y_0) = e$, y

$$f_x(x_0, y_0) = 2x_0 e^{x_0^2 y_0} = 2e,$$
$$f_y(x_0, y_0) = x_0^2 e^{x_0^2 y_0} = e.$$

Por lo tanto, nuestro valor aproximado es

$$f(1.05, 0.97) = e + 2e((0.05) + e(-0.03)$$
$$= 1.07e = 2.91.$$

En efecto, el valor exacto hasta cuatro cifras decimales es 2.9137.

Podemos obtener una aproximación mayor por medio del teorema de Taylor; véase el problema 3.4. □

Problema 1.21 Si a, b, c son los lados de un triángulo, expresar a en términos de b, c y el ángulo opuesto A; determinar la diferencial da. A continuación, encontrar un valor aproximado para a cuando $b = 4.10$, $c = 3.95$, $A = 62°$.

Solución. Por la fórmula del coseno,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \tag{1.43}$$

Si tomamos diferenciales,

$$2a\,da = 2b\,db + 2c\,dc - 2c \cos A\,db - 2b \cos A\,dc + 2bc \operatorname{sen} A\,dA,$$

es decir,

$$da = a^{-1}[(b - c \cos A)\,db + (c - b \cos A)\,ds + bc \operatorname{sen} A\,dA]. \tag{1.44}$$

A fin de obtener la aproximación que se desea, comenzamos con los valores $b = 4$, $c = 4$, $A = 60°$, así que, por (1.43),

$$a^2 = (4)^2 + (4)^2 - 2(4)(4)(\tfrac{1}{2}) = 16, \qquad \text{es decir } a = 4$$

(lo cual también puede deducirse del hecho de que los valores escogidos correspondan a un triángulo equilátero). A continuación, ponemos

$$\Delta b = db = 0.10, \quad \Delta c = dc = -0.05,$$
$$\Delta A = dA = (62 - 60)\pi/180 = \pi/90$$

(radianes) y obtenemos una relación aproximada a partir de (1.44), cuando sustituimos da por Δa, lo cual conduce a

$$\Delta a = \tfrac{1}{4}[4 - 4(\tfrac{1}{2})](0.10) + [4 - 4(\tfrac{1}{2})](-0.05) + 4(4)(\tfrac{1}{2}\sqrt{3})(\pi/90)$$
$$= \tfrac{1}{4}(0.20 - 0.10 + 0.484) = 0.15,$$

hasta dos cifras decimales.

Por lo tanto, el valor aproximado para a es 4.15. En efecto, esto concuerda con el valor exacto, calculado hasta dos cifras decimales. □

EJERCICIOS

1. Si $f(x, y) = x \cos y + y \operatorname{sen} xy$, encontrar $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $f_{xx}(x, y)$, $f_{xx}(1, \frac{1}{2}\pi)$, $f_{xy}(1, \frac{1}{2}\pi)$.

2. Si $f(x, y) = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ cuando $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$, demostrar que f es continua en $(0, 0)$. Demostrar, a partir de las definiciones, que tanto $f_{xy}(0, 0)$ como $f_{yx}(0, 0)$ existen pero tienen valores diferentes.

3. Si $z = \operatorname{sen} xy^2$ y $x = t + e^t$, $y = te^{-t}$, encontrar dz/dt y d^2z/dt^2 cuando $t = 1$.

4. Si $x = e^u \cos v$, $y = e^u \operatorname{sen} v$, encontrar $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$, en términos de x y y, (i) por el método de eliminación del problema 1.12, (ii) por el método de resolver primero para u y v. Demostrar que, para una función arbitraria $f(x, y)$ (continua y con derivadas parciales continuas hasta de segundo orden),

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{-2u}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right].$$

5. Demostrar que $z = f(x + e^y) + g(x - e^y)$ es solución de la ecuación

$$e^{2y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

para f y g arbitrarias (con derivadas parciales de segundo orden continuas). Encontrar una solución con la propiedad de que $z = 0$, $\partial z/\partial y = 1 + x$ cuando $y = 0$.

6. Demostrar que $f(x, y) = \sqrt{(x^4 + y^4)}$ satisface la ecuación

$$xf_x + yf_y = 2f,$$

(i) mediante el cálculo de las derivadas parciales, (ii) por el teorema de Euler acerca de las funciones homogéneas.

Demostrar también que

$$x^2 f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2 f_{yy} = 2f.$$

7. (i) Demostrar que $(xy+1)y\,dx+[(xy-1)x+y]\,dy$ no es una diferencial exacta. (ii) Encontrar una $f(x, y)$ con la propiedad

$$df = y[(1+x)e^{x+y}-2x]\,dx+x[(1+y)e^{x+y}-x]\,dy.$$

8. Encontrar un valor aproximado, hasta dos cifras decimales para

$$\ln[(0.97)e^{0.48}-(0.03)e^{0.52}]$$

considerando la diferencial de $\ln[(1-x)e^{1-y}-xe^{y}]$ en $x = 0$, $y = 0.5$.

CAPITULO 2

Jacobianos y transformaciones

2.1 Funciones implícitas y jacobianos Cuando tres variables x, y, z están relacionadas por una sola ecuación de la forma

$$F(x, y, z) = 0 \tag{2.1}$$

normalmente podemos asignar valores a dos de ellas, por ejemplo x y y, y entonces la tercera variable, z, queda determinada. Decimos que (2.1) define z como función *implícita* de x y y.

Sin embargo, no toda ecuación de esta forma define una de sus variables (supuesta real) en función de las otras dos. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$$

nunca se cumple cuando todas las variables toman valores reales. Asimismo, la ecuación

$$(x + y)^2 + z^2 - 1 = 0 \tag{2.2}$$

define una z real tan sólo cuando $(x + y)^2 \leqslant 1$, y en cada punto que no se encuentre sobre la frontera en este dominio de dependencia, la función es de valores múltiples.

Cuando (2.1) define z como una función de x y y en una región R del plano xy, digamos $z = f(x, y)$, entonces (2.1) se convierte en una identidad en x y y, al sustituir z por $f(x, y)$. Por tanto, si F es la función a la izquierda de (2.2), entonces, en la faja R cuya ecuación es $|x + y| \leqslant 1$, tenemos

$$z = f(x, y) = \pm\sqrt{[1 - (x+y)^2]},$$

y, al poner esta expresión en lugar de z en (2.2), nos queda

$$F[(x, y, f(x, y)] = (x+y)^2+1-(x+y)^2-1 = 0,$$

lo cual es una identidad.

Supongamos que podemos encontrar un conjunto de valores x_0, y_0, z_0 que satisfacen (2.1) y que, cerca de (x_0, y_0, z_0), F y sus primeras derivadas parciales son continuas; además que $\partial F/\partial z \neq 0$. Entonces un *teorema* de *existencia* afirma que en una región determinada del plano xy que contiene (x_0, y_0), existe precisamente una función diferenciable $z = f(x, y)$ mediante la cual (2.1) se reduce a una identidad, tal que $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Problema 2.1 Si $x^2-xz+z^2+yz = 4$, encontrar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ cuando $x = 1$, $y = 3$.

Solución. Tenemos

$$F(x, y, z) \equiv x^2-xz+z^2+yz-4 = 0. \tag{2.3}$$

Si suponemos que z está definida como una función de x y y mediante esta ecuación y derivamos con respecto a x (y constante), obtenemos

$$2x-z-x\frac{\partial z}{\partial x}+2z\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial x} = 0. \tag{2.4}$$

De la misma manera, derivando con respecto a y (x constante),

$$-x\frac{\partial z}{\partial y}+2z\frac{\partial z}{\partial y}+y\frac{\partial z}{\partial y}+z = 0. \tag{2.5}$$

Resolviendo (2.4), (2.5), resulta

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z-2x}{2z+y-x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-z}{2z+y-x}. \tag{2.6}$$

Cuando $x = 1$, $y = 3$, (2.3) da

$$z^2+2z-3 = 0,$$

es decir,

$$z = 1 \text{ ó } -3. \tag{2.7}$$

Al tomar este resultado para sustituirlo en (2.6),

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{4} \text{ ó } \frac{5}{4}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{4} \text{ ó } -\frac{3}{4};$$

en cada caso, el primer valor corresponde a $z = 1$, y el segundo a $z = -3$. □

Problema 2.2 Si u y v son funciones de x y y, definidas implícitamente en alguna región del plano xy por las ecuaciones

$$u \operatorname{sen} v + x^2 = 0,$$
$$u \cos v - y^2 = 0,$$

encontrar $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial y$.

Solución. Derivamos las ecuaciones dadas con respecto a x, considerando y como constante.

$$\frac{\partial u}{\partial x} \operatorname{sen} v + u \cos v \frac{\partial v}{\partial x} + 2x = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cos v + u(-\operatorname{sen} v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

De igual manera, derivamos con respecto a y tomando x como constante:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \operatorname{sen} v + u \cos v \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \cos v + u(-\operatorname{sen} v) \frac{\partial v}{\partial y} - 2y = 0.$$

Resolvemos las últimas cuatro ecuaciones a fin de obtener las derivadas parciales que se buscan:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2x \operatorname{sen} v, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2x}{u} \cos v,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \cos v, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{2y}{u} \operatorname{sen} v.$$ □

Cuando la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define z como una función de x y y, el método del problema 2.1 nos muestra (en la notación compacta de subíndices) que

$$F_x + F_z z_x = 0, \quad F_y + F_z z_y = 0,$$

de donde obtenemos

$$z_x = -F_x/F_z, \quad z_y = -F_y/F_z. \tag{2.8}$$

Observe el lector que el denominador F_z no se anula cuando F satisface las condiciones del teorema de existencia citado al principio de esta sección.

De nuevo, si las ecuaciones simultáneas

$$F(x, y, u, v) = 0, \qquad G(x, y, u, v) = 0 \tag{2.9}$$

definen u y v como funciones de x y y, como en el problema 2.2, entonces al derivar parcialmente cada ecuación con respecto a x y después con respecto a y, se tiene:

$$F_x + F_u u_x + F_v v_x = 0, \quad F_y + F_u u_y + F_v v_y = 0, \tag{2.10}$$

$$G_x + G_u u_x + G_v v_x = 0, \quad G_y + G_u u_y + G_v v_y = 0. \tag{2.11}$$

Una vez resueltas tales ecuaciones, obtenemos

$$u_x = -\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix},$$

$$v_x = -\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}, \tag{2.12}$$

con dos relaciones parecidas, donde se pone y en lugar de x. Se supone, desde luego, que el denominador $J = F_u G_v - F_v G_u \neq 0$.

Se aplica un teorema de existencia en el caso de (2.9) cuando las ecuaciones se satisfacen para un conjunto de valores x_0, y_0, u_0, v_0, si F, G y sus derivadas parciales de primer orden son continuas y $J \neq 0$ en las cercanias de (x_0, y_0, u_0, v_0). El teorema establece que en cierta región del plano xy, la cual contiene a (x_0, y_0), existen precisamente dos funciones diferenciables $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$, mediante las cuales (2.9) se convierten en un par de identidades, con la propiedad de que $u_0 = f(x_0, y_0)$, $v_0 = g(x_0, y_0)$.

Los determinantes funcionales como el de (2.12) se llaman *jacobianos*, y se denota el denominador de esa ecuación por $\partial(F, G)/\partial(u, v)$. De la misma manera, si F, G, H son funciones de las variables $u, v, w, x_1, \ldots, x_n$, entonces el jacobiano de F, G, H con respecto a u, v, w es

$$\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v & F_w \\ G_u & G_v & G_w \\ H_u & H_v & H_w \end{vmatrix}. \tag{2.13}$$

En este último caso, si las ecuaciones $F = 0$, $G = 0$, $H = 0$ definen u, v, w como funciones de las variables x, el procedimiento que nos condujo a (2.12), muestra que, para una derivada típica, se tendrá

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\partial(F, G, H)/\partial(x_i, v, w)}{\partial(F, G, H)/\partial(u, v, w)}, \quad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{2.14}$$

con otras cinco formas semejantes.

Problema 2.3 Si la ecuación $F(x, y, z) = 0$ puede resolverse para cualquiera de las variables x, y, z en términos de las otras dos, demostrar que

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1,$$

donde la variable indicada fuera de cada paréntesis se mantiene constante al derivar.

Solución. En primer lugar, consideramos x como función de y y z, y obtenemos, al derivar con respecto a y,

$$F_x x_y + F_y = 0,$$

es decir,

$$(x_y)_z = -F_y/F_x. \tag{2.15}$$

De la misma manera, encontramos que

$$(y_z)_x = -F_z/F_y, \qquad (z_x)_y = -F_x/F_z. \tag{2.16}$$

Así, al formar el producto de (2.15), (2.16)

$$(x_y)_z (y_z)_x (z_x)_y = -1. \qquad \square$$

2.2 Dependencia funcional Consideremos las ecuaciones

$$u = x^2+y+1, \quad v = x^4+2x^2y+y^2-x^2-y. \tag{2.17}$$

Como existe una identidad entre u y v, a saber:

$$v = (u-1)^2-(u-1) = u^2-3u+2,$$

decimos que u y v son *funcionalmente dependientes*. En general, si $u_1, u_2, \ldots, u_m$ son m funciones de las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, entonces decimos que las u son funcionalmente dependientes cuando existe una relación de identidad de la forma $F(u_1, u_2, \ldots, u_m) = 0$.

En los problemas siguientes, supondremos que F es una función continua con derivadas parciales continuas.

Problema 2.4 (i) Demostrar que si $u(x, y)$, $v(x, y)$ son funcionalmente dependientes en una región del plano xy, entonces

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \equiv 0. \tag{2.18}$$

(ii) Verificar (2.18) en el caso en que u y v están dadas por (2.17).

Solución. (i) Por hipótesis, existe una relación de identidad de la forma $F(u, v) = 0$; entonces, derivando parcialmente con respecto a x y y en sucesión:

$$F_u u_x + F_v v_x = 0, \tag{2.19}$$

$$F_u u_y + F_v v_y = 0. \tag{2.20}$$

Por consistencia con este resultado, debe verificarse que

$$\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0, \tag{2.21}$$

a menos que tanto F_u como F_v sean idénticamente cero.

En este último caso, observamos que si u y v tienen la propiedad de que el jacobiano (2.21) es continuo y distinto de cero en cualquier punto, entonces debe ser distinto de cero en una vecindad N del punto en cuestión. Por lo tanto, por (2.19), (2.20), F_u y F_v

son cero en todos los puntos de N, de modo que F no depende de u ni de v y la ecuación $F = 0$ no define relación funcional alguna.

(ii) Si $u = x^2 + y + 1$, $v = x^4 + 2x^2y + y^2 - x^2 - y$, el jacobiano (2.21) es

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & 4x^3+4xy-2x \\ 1 & 2x^2+2y-1 \end{vmatrix}$$
$$= 2x(2x^2+2y-1) - (4x^3+4xy-2x) = 0. \quad \square$$

Problema 2.5 Demostrar que la condición de (2.18) es *suficiente* para la existencia de una relación funcional entre $u(x, y)$, $v(x, y)$.

Solución. Escribimos

$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y). \tag{2.22}$$

Si no tomamos en cuenta el caso trivial en el que todos los elementos del determinante (2.18) son cero, podemos suponer que $u_x \neq 0$ (de lo contrario, intercambiamos la notación u y v, ó x y y). Por lo tanto, la primera relación de 2.22), puesta en la forma $f(x, y) - u = 0$ determina x como una función de y y u, de acuerdo con el teorema de existencia de las págs. 33 y 34. Cuando sustituimos x por esta función en la segunda igualdad de (2.22) obtenemos una relación de la forma

$$v = G(u, y). \tag{2.23}$$

Si podemos demostrar que G_y es idénticamente cero, deduciremos de (2.23) que u y v están funcionalmente relacionadas. Ahora bien, por (2.23),

$$v_x = G_u u_x, \quad v_y = G_u u_y + G_y,$$

así que la condición dada (2.18) se traduce en

$$0 = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ G_u u_x & G_u u_x + G_y \end{vmatrix} = u_x G_y,$$

una vez desarrollado el determinante. Pero $u_x \neq 0$, y, por lo tanto, $G_y = 0$. De esto se deduce el resultado. $\square$

Problema 2.6 Con el criterio del jacobiano, demostrar que existe una relación funcional entre

$$u = 2\ln x + \ln y, \quad v = e^{x\sqrt{y}}, \quad (x, y > 0), \tag{2.24}$$

y determinar tal relación.

Solución. Tenemos:

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & x_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2/x & 1/y \\ \sqrt{y}e^{x\sqrt{y}} & e^{x\sqrt{y}}x/2\sqrt{y} \end{vmatrix} = 0,$$

y, por lo tanto, existe una relación funcional entre u y v.

Al resolver la primera igualdad de (2.24) para y, encontramos que $y = e^u/x^2$. Al poner esto en lugar de y en la segunda relación de (2.24),

$$\ln v = x\sqrt{y} = e^{\frac{1}{2}u},$$

es decir,

$$e^{\frac{1}{2}u} - \ln v = 0.$$

El resultado también podría haberse obtenido por inspección. □

Problema 2.7 (i) Demostrar que si $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ están funcionalmente relacionados, entonces

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = 0. \tag{2.25}$$

(ii) Con la suposición de que se verifica el resultado recíproco, demostrar que existe una relación funcional entre

$$u = y^2(y - z + x) - x^2(x + y - z),$$
$$v = x + y,$$
$$w = y^2 - x^2 - yz + xz.$$

Solución. (i) Sea la relación $F(u, v, w) = 0$. Cuando derivamos sucesivamente con respecto a x, y, z, obtenemos

$$F_u u_x + F_v v_x + F_w w_x = 0,$$

con dos ecuaciones más en las cuales x se sustituye por y y por z. Ahora bien, a menos que se anulen F_u, F_v, F_w (en cuyo caso $F = 0$ no define una relación funcional), debemos tener, por consistencia entre las tres últimas ecuaciones, la condición determinantal (2.25).

(ii) Con las funciones dadas, encontramos al formar las derivadas necesarias,

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y^2-3x^2-2xy+2xz & 3y^2-2yz+2xy-x^2 & x^2-y^2 \\ 1 & 1 & 0 \\ z-2x & 2y-z & x-y \end{vmatrix} = 0, \tag{2.26}$$

como se tiene (por ejemplo) al desarrollar el determinante respecto al renglón intermedio y reducir. En consecuencia, existe una relación funcional entre u, v y w. En efecto, es $u = vw$. □

Como extensión de los resultados anteriores, supongamos que tenemos m funciones de n variables, $u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_m(x_1, \ldots, x_n)$. Si A denota la matriz $m \times n$ cuyo elemento en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna es $\partial u_i/\partial x_j$, entonces existe una relación funcional de la forma $F(u_1, \ldots, u_m) = 0$, si el rango de A es menor que m. (El *rango* de una matriz es el número máximo de renglones o columnas linealmente independientes.) Cuando el rango es $r\ (< m)$, existen exactamente $m - r$ relaciones independientes entre las *úes*,

Por ejemplo, la matriz 3×3 de (2.26) tiene rango menor que 3, porque el determinante es cero. Pero, por inspección, los dos últimos renglones son linealmente independientes (pues no son proporcionales), así que el rango es, por lo menos, 2. Esto último nos permite afirmar que el rango es exactamente 2 y tan sólo hay $1 (= 3 - 2)$ relación entre u, v y w a saber: $u = vw$.

Problema 2.8 ¿Cuántas relaciones funcionales independientes existen entre las funciones

$$t = 2x+y, \qquad u = x+z,$$
$$v = 2x^2+xy+yz+2xz, \qquad w = x+y-z?$$

Solución. Hemos de considerar el rango de la matriz 4×3

$$\begin{bmatrix} t_x & t_y & t_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4x+y+2z & x+z & 2x \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2.27}$$

El rango no puede exceder del número de columnas, 3, y como $m = 4$, existe por lo menos una relación funcional entre t, u, v y w. (Este es siempre el caso cuando hay más funciones que variables.) Como los dos primeros renglones de la matriz son, sin duda, linealmente independientes, el rango es, por lo menos, 2. Tan sólo debemos determinar si el rango es 2 ó 3.

Aquí podemos servirnos provechosamente de otra definición de rango: si una matriz contiene por lo menos una submatriz cuadrada de p renglones con un determinante que no se anula, y toda matriz cuadrada de $(p + 1)$ renglones tiene determinante cero, entonces el rango es p. Las cuatro submatrices de 3 renglones en (2.27), que formamos al eliminar cualquiera de los renglones resultan tener determinante cero, así que concluimos que el rango es menor que 3. Por lo tanto, es 2.

De esto se desprende que el número de relaciones funcionales independientes es $4-2 = 2$. Podemos expresarlas de diversas maneras; una de ellas es $v = tu$, $w = t - u$. □

2.3 Propiedades de los jacobianos En esta sección suponemos que existen y son continuas todas las derivadas en cuestión.

Problema 2.9 Si $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, donde x y y son funciones de las variables independientes r y s, demostrar que

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, s)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)} \tag{2.28}$$

Solución. Observamos la semejanza entre esta ecuación y la regla de derivar una función compuesta en el cálculo de una variable. La demostración es sencilla, pues

$$\text{miembro izquierdo} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_r & x_s \\ y_r & y_s \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_x x_r + u_y y_r & u_x x_s + u_y y_s \\ v_x x_r + v_y y_r & v_x x_s + v_y y_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_r & u_s \\ v_r & v_s \end{vmatrix} = \text{miembro derecho}$$

donde hemos aplicado la regla de multiplicación de matrices para multiplicar determinantes. □

Problema 2.10 Si $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ pueden resolverse para obtener las relaciones inversas $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, demostrar que

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1 \Big/ \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}. \tag{2.29}$$

Solución. Observe el lector que ninguno de los jacobianos en (2.29) puede anularse, pues cualquiera de los pares de ecuaciones que relacionan u, v con x, y es invertible.

Por (2.28), poniendo u, v en lugar de r, s (sin olvidar que las primeras desempeñan papeles de variables tanto dependientes como independientes), y puesto que

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

tenemos

$$1 = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

de donde se desprende inmediatamente la validez de (2.29). □

Problema 2.11 Si u, v, w son funciones de las variables independientes x_1, x_2, x_3, x_4, y si

$$A = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x_2, x_3, x_4)}, \qquad B = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x_3, x_4, x_1)},$$

$$C = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x_4, x_1, x_2)}, \qquad D = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}$$

demostrar que

$$\frac{\partial A}{\partial x_1} - \frac{\partial B}{\partial x_2} + \frac{\partial C}{\partial x_3} - \frac{\partial D}{\partial x_4} = 0. \tag{2.30}$$

Solución. Sean $\partial_1 = \partial/\partial x_1$, $u_1 = \partial u/\partial x_1$, etc. Consideremos

$$\frac{\partial A}{\partial x_1} = \partial_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 & u_4 \\ v_2 & v_3 & v_4 \\ w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}. \tag{2.31}$$

Mediante un conocido procedimiento para derivar determinantes, esta derivada es la suma de los tres determinantes que obtenemos de A al derivar los elementos de un renglón mientras los otros dos permanecen sin alterarse. Al desarrollar cada uno de estos tres determinantes respecto al renglón derivado, obtenemos una expresión para $\partial A/\partial x_1$ como una suma de menores de 2×2 de A multiplicados por una derivada de segundo orden (mixta) de u. Por ejemplo, el primer término de la suma es

$$u_{12}\begin{vmatrix} v_3 & v_4 \\ w_3 & w_4 \end{vmatrix}. \tag{2.32}$$

Consideremos a continuación la expresión (2.30) completa; podemos expresarla como un determinante formal:

$$A_1 - B_2 + C_3 - D_4 = \begin{vmatrix} \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 & \partial_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}, \tag{2.33}$$

donde desarrollamos respecto al primer renglón y mantenemos siempre un operador derivado a la izquierda de la función sobre la cual actúa. Al operar con los tres términos restantes en este desarrollo como se hizo con el (2.31), podemos expresar (2.33) como una serie finita de términos semejantes al (2.32), en el cual los dos índices que aparecen dentro del menor (por ejemplo, 3, 4) son distintos a los de la segunda derivada que se encuentra fuera del menor, (1, 2).

La inspección de (2.33) nos muestra que los únicos términos que contienen a u_{12} (ó u_{21}) en la serie son

$$u_{12}\begin{vmatrix} v_3 & v_4 \\ w_3 & w_4 \end{vmatrix}, \qquad -u_{21}\begin{vmatrix} v_3 & v_4 \\ w_3 & w_4 \end{vmatrix},$$

Cuya suma es cero. Por una permutación cíclica de los índices y de las variables u, v, w, se deduce que el coeficiente de cada segunda derivada de u, v, ó w en el desarrollo en serie de (2.33) se anula de la misma manera. En consecuencia, el valor del determinante (2.33) es cero, como debía demostrarse. □

2.4 Transformaciones Hasta aquí, venimos llamando *función* a toda regla que asocia con cada miembro de un conjunto, un elemento particular de un segundo conjunto. También se llama *mapeo*.

En muchas aplicaciones donde intervienen cambios de variable, debemos trabajar con fórmulas como:

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \tag{2.34}$$

que transforman (o "mapean") puntos en alguna región del plano uv sobre puntos de una región correspondiente del plano xy. Estos mapeos entre conjuntos de puntos suelen llamarse *transformaciones*. Podemos considerar también transformaciones de la forma

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w),$$

donde intervienen puntos en el espacio de tres dimensiones. (Aquí no es preciso considerar otra posibilidad, a saber, que el número de variables $u, v, \ldots$ difiera del número de variables $x, y, \ldots$.)

En (2.34), el punto (x, y) que corresponde a una elección particular de u y v forma la *imagen* del punto (u, v) bajo la transformación. Un lugar geométrico en el plano u, v, como una curva, tendrá un *lugar imagen* en el plano xy.

Si f y g son continuas y tienen derivadas parciales continuas, y si $\partial(x, y)/\partial(u, v) \neq 0$, en principio podemos resolver (2.34) para obtener la *transformación inversa* $u = F(x, y)$, $v = G(x, y)$. La correspondencia es entonces *uno a uno*, pues cada punto de la región adecuada de uno de los planos posee un punto imagen único en la región correspondiente del otro plano.

Problema 2.12 Si R es la región triangular en el plano xy limitada por las rectas $x + y = 2$, $y - x = -1$, $x = 0$, encontrar la región imagen S en el plano uv bajo la transformación $x = u + 2v$, $y = v - 2u$. Encontrar, además, $\partial(u, v)/\partial(x, y)$.

Solución. La recta $x + y = 2$ se mapea sobre el lugar geométrico $(u + 2v) + (v - 2u) = 2$, es decir $3v - u = 2$.

La recta $y - x = -1$ se mapea sobre $(v - 2u) - (u + 2v) = -1$, es decir, $3u + v = 1$, y la recta $x = 0$ sobre $u + 2v = 0$. En consecuencia, la región S limitada por estas rectas imagen en el plano uv es la que se muestra en la figura 2.1.

A partir de las relaciones dadas, $x = u + 2v$, $y = v - 2u$, encontramos:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

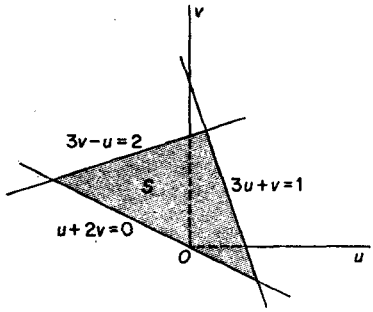

Figura 2.1

y, por lo tanto,

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1 \Big/ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{5}.$$

En ocasiones, una transformación es válida e invertible con la salvedad de algunos puntos de una región, llamados *puntos singulares* en los cuales la correspondencia no es uno a uno. Esto sucede en muchos casos prácticos, y usualmente se manifiesta en la calidad del jacobiano, el cual puede anularse o volverse infinito en un punto singular. □

Problema 2.13 (i) Encontrar la región R del plano xy mapeada en el plano uv por medio de la transformación

$$x = u \cosh v, \quad y = u \operatorname{senh} v. \tag{2.35}$$

(ii) Describir las curvas de R cuyas imágenes son las rectas $u = u_0$ y $v = v_0$.

(iii) Indicar en un diagrama la región R_1 en el plano xy cuya imagen es la región rectangular S_1, limitada por las rectas $u = 1$, $u = 2$, $v = \frac{1}{2}$, $v = 1$.

Solución. (i) Al eliminar sucesivamente u y v entre las (2.35) obtenemos

$$u^2 = x^2 - y^2, \quad \tanh v = y/x, \tag{2.36}$$

siempre y cuando $x \neq 0$. Cuando $x = 0$, de (2.35) se deduce que $u = 0$ (pues $\cosh v \neq 0$), y de ahí que $y = 0$; eso entraña que toda

la recta $u = 0$ corresponde al punto $x = 0$, $y = 0$, de modo que constituye un punto singular de la transformación.

Cuando $x \neq 0$, tenemos, por (2.36), que $|y/x| = |\tanh v| < 1$, así que $|y| < |x|$. Al someter (2.35) a esta última condición, la transformación nos define un valor único de v en $-\infty < v < \infty$ para cada par de valores (x, y). De nuevo, al tomar $|y| < |x|$, tenemos que $u^2 > 0$ en (2.36), lo cual nos asegura que u es real. Por (2.35), vemos que u tiene el mismo signo que x, y (2.36) nos indica que u puede tomar todos los valores reales.

En consecuencia, la región R está dada por $|y| < |x|$ (que se ha sombreado en la figura 2.2*a*), junto con $x = 0$, $y = 0$ como punto singular. La región imagen está compuesta de todo el plano uv.

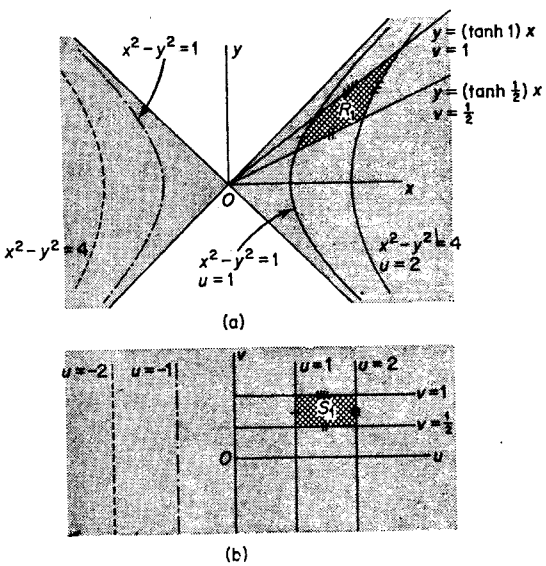

Figura 2.2

(ii) La recta $u = u_0$ es imagen de una rama de la hipérbola rectangular $x^2 - y^2 = u_0^2$, siendo la rama tal que x tiene el mismo signo que u_0. (Excluimos el caso singular en que $u_0 = 0$, que ya se trató en (i).) La recta $v = v_0$ es la imagen de la recta $y = (\tanh v_0)x$. En la figura 2.2 se muestran algunos casos.

(iii) A partir de (ii), vemos que las ramas para valores positivos de x en las hipérbolas $x^2 - y^2 = 1$ y $x^2 - y^2 = 4$ corresponden respectivamente a $u = 1$, $u = 2$. Las rectas $y = (\tanh \frac{1}{2})\, x$ y $y = (\tanh 1)\, x$ corresponden a $v = \frac{1}{2}$ y $v = 1$. La región R_1 es, por lo tanto, la que se muestra en el diagrama.

El jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ que corresponde a (2.35) es fácil de evaluar; resulta ser igual a u. Observamos que se anula en el punto singular $x = 0$, $y = 0$. □

Cuando una región R en el plano xy corresponde a una región S en el plano uv, en una transformación invertible, las fronteras de las dos regiones también se corresponden. Supongamos que un punto P describe la frontera de R en un sentido definido (por ejemplo, en el sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj). Entonces, su punto imagen Q describirá la frontera de S, ya sea en el mismo sentido o en sentido opuesto. Un resultado importante es que si el jacobiano es positivo, las dos fronteras se describirán en el mismo sentido, y si el jacobiano es negativo, los sentidos serán opuestos.

Por ejemplo, en la figura 2.2, las partes correspondientes de las fronteras de R_1 y S_1 se han marcado con el mismo número de trazos. El número de trazos aumenta de 1 a 4 cuando se recorre cada frontera en la misma dirección (en el sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj) y el jacobiano u es positivo.

Como un segundo ejemplo, consideremos la transformación que resulta de (2.35) al reemplazar x por $-x$. La región R'_1 en el plano xy, que corresponde a S_1, se obtiene al reflejar R_1 en la recta $x = 0$ (figura 2.3). Esta reflexión invierte el sentido en que debe recorrerse la frontera a fin de encontrar un número creciente de trazos, desde 1 hasta 4. Pero ahora tenemos $\partial(x, y)/\partial(u, v) = -u$, que es negativo cuando $u > 0$.

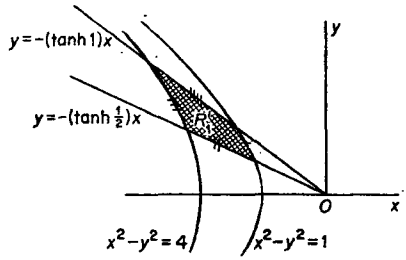

Figura 2.3

Problema 2.14 Considérese la transformación

$$x = \frac{\operatorname{senh} u \cos\theta}{\cosh u - \cos v}, \quad y = \frac{\operatorname{senh} u \operatorname{sen}\theta}{\cosh u - \cos v} \quad z = \frac{\operatorname{sen} v}{\cosh u - \cos v}, \tag{2.37}$$

donde

$$0 \leqslant u < \infty, \quad 0 \leqslant v < 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

Encontrar la región R del espacio xyz que se mapea sobre la región rectangular del espacio $uv\theta$ limitada por los planos $u = \frac{1}{2}$, $u = 1$, $v = \pi/6$, $v = \pi/4$, $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$.

Solución. Empezaremos por una consideración más general de las tres familias de superficies cuyas respectivas ecuaciones son $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ y $\theta = \text{const.}$ Como (2.37) da $y = x \tan\theta$, tenemos que la superficie $\theta = \theta_0$ es un plano que pasa por el eje z, con un ángulo de inclinación θ_0 respecto del plano $x = 0$.

Si *tanto u como v* se mantienen constantes mientras θ varía, entonces z y $x^2 + y^2$ permanecen constantes, de acuerdo con (2.37) y, por tanto, el punto correspondiente en el espacio xyz describe una circunferencia paralela al plano xy, con centro en el eje z. Por consiguiente si cualquier miembro de la familia $u = \text{const.}$ contiene un punto de cualquier circunferencia así, debe contener la circunferencia entera. Esto significa que cada uno de los miembros es una superficie de revolución alrededor de Oz, y lo mismo podemos decir de cada curva de la familia $v = \text{const.}$ Podemos establecer todas las demás propiedades de ambas familias, si investigamos sus curvas de intersección con el plano $\theta = 0$ (es decir, $y = 0$).

Cuando $\theta = 0$, obtenemos, a partir de (2.37),

$$(x - \coth u)^2 + z^2 = \operatorname{cosech}^2 u, \quad x^2 + (z - \cot v)^2 = \operatorname{cosec}^2 v, \tag{2.38}$$

La primera de estas ecuaciones indica que la superficie $u = u_0$ corta el plano $y = 0$ en el espacio xyz, en una circunferencia de radio $\operatorname{cosech} u_0$ con centro en $x = \coth u_0$, $z = 0$. De la misma manera, la segunda de (2.38) indica que la superficie $v = v_0$ corta el plano $y = 0$ en una circunferencia de radio $\operatorname{cosec} v_0$ y centro en $x = 0$, $z = \cot v_0$. (Las dos familias de circunferencias $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ en el plano $y = 0$ son, en efecto, familias ortogonales de circunferencias *coaxiales*, en las cuales $x = \pm 1$, $z = 0$ son puntos límite. De todo lo anterior se desprende que cada miembro de la primera familia es un toro; u, v, θ son *coordenadas toroidales.*)

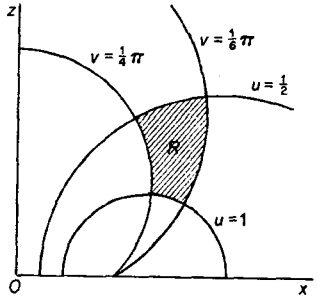

Figura 2.4

La región R que buscamos se obtiene al hacer girar la región sombreada de la figura 2.4, recorriendo un ángulo de $\frac{1}{2}\pi$ alrededor de Oz. Los extremos planos de la región son $y = 0$ y $x = 0$.

Observe el lector que los denominadores de (2.37) se vuelven cero cuando $u = v = 0$, lo cual constituye una recta de puntos singulares de la transformación en el espacio $uv\theta$. □

En el capítulo 4 estudiaremos otras propiedades de las transformaciones.

EJERCICIOS

1. Si $x^2 + yu + zu^2 = xyz$ define u como una función de x, y, y z, encontrar u_x, u_y, u_z.

2. Si las ecuaciones

$$u^3x - yv = u, \quad v^3y - xu = v,$$

definen u y v como funciones de x y y, encontrar u_x y v_x.

3. Verificar la existencia de una relación funcional entre

$$u = x - y + z, \quad v = xz - (x+z)y, \quad w = x^2 + y^2 + z^2,$$

y, si existe, determinarla.

4. ¿Cuántas relaciones funcionales independientes existen entre

$$t = x - y, \quad u = x + 3y + 2z, \quad v = y(y+z) - x(x+z), \quad w = x + y + z?$$

5. Para la transformación $u = x + y^2$, $v = y - x^2$, evaluar el jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$.

6. Sugerir una generalización de (2.29) que se aplique a una transformación invertible

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z).$$

Si $u = x+y+z$, $v = x^2+z^2$, $w = (x+y)z$, encontrar $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ y dar los valores de x, y y z para los cuales el resultado es válido.

7. Una región rectangular R en el plano xy, limitada por las rectas $x = \ln a$, $x = \ln b$, $y = \frac{1}{2}\pi$, $y = \pi$ $(b > a > 0)$, se mapea sobre una región S en el plano uv bajo la transformación

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \operatorname{sen} y.$$

Demostrar que las rectas $x = x_0$ y $y = y_0$ en R se mapean respectivamente, en porciones de circunferencias y de rectas que pasan por el origen en el plano uv. Hacer un esquema de la región S.

Evaluar $\partial(u, v)/\partial(x, y)$. Si un punto P se mueve por la frontera de R en un sentido dado, ¿describe el punto Q, su imagen bajo la transformación, la frontera de S en el mismo sentido o en sentido opuesto?

CAPITULO 3

El teorema de Taylor y sus aplicaciones

3.1 El teorema de Taylor en dos variables Si $f(x)$ tiene una $(n+1)$-ésima derivada continua en el intervalo $a \leqslant x \leqslant a+h$, entonces

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n, \qquad (3.1)$$

donde el *residuo* R_n está dado por

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c), \qquad (3.2)$$

para algún punto c con la propiedad de que $a < c < a+h$. Este resultado se conoce como *teorema de Taylor en una variable.* (El caso particular en que $n = 0$ se llama también *teorema del valor medio.*)

Hay varias expresiones posibles para R_n. La de (3.2) es la forma de *Lagrange*, mientras que la forma de *Cauchy* es

$$R_n = \frac{h^{n+1}p^n}{n!} f^{(n+1)}(c), \qquad (3.3)$$

donde c es un punto con la propiedad de que $a < c < a+h$, aunque no necesariamente el mismo punto de (3.2), y $p = 1-(c-a)/h$. (Observe el lector que $0 < p < 1$.)

Podemos extender el teorema de Taylor a funciones de más de una variable; aquí bastará con enunciar el teorema en el caso de dos variables independientes. Supongamos que $f(x, y)$ y sus derivadas parciales de todos los órdenes hasta $n + 1$ son continuas en una vecindad de cada punto sobre el segmento rectilíneo PQ, donde P es el punto (a, b) y Q es el punto $(a + h, b + k)$. Entonces

$$f(a+h,\ b+k) = f(a, b) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(a, b) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a, b) + R_n, \tag{3.4}$$

donde

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(c, d), \tag{3.5}$$

y

$$(c, d) = (a+\theta h,\ b+\theta k), \quad 0 < \theta < 1,$$

es un punto del segmento rectilíneo PQ. Aquí, la notación

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a, b) \tag{3.6}$$

significa que el operador debe desarrollarse por el teorema del binomio y aplicarse a $f(x, y)$ antes de poner $x = a$, $y = b$. Por ejemplo,

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a, b) = h^2 f_{xx}(a, b) + 2hk f_{xy}(a, b) + k^2 f_{yy}(a, b).$$

No es difícil demostrar (3.4), (3.5), si se suponen válidas (3.1), (3.2). Fijamos a, b, h, k y consideramos la función de una variable:

$$F(t) = f(a+th,\ b+tk), \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Entonces, (3.1), (3.2) se usan para expresar $F(t)$ en términos de $F(0)$ y las primeras n derivadas de $F(t)$ en $t = 0$, junto con un término residual. El resultado se deduce del hecho de que un término como el (3.6) es simplemente $F^{(n)}(0)$, por la regla de la cadena. Los detalles se dejan al lector. El caso en que $n = 0$ se llama también aquí teorema del valor medio.

En cualquiera de las formas anteriores del teorema de Taylor, y en las extensiones obvias hacia números de variables mayores que dos, se obtiene un desarrollo en serie infinita cuando se permite n tienda hacia el infinito, siempre y cuando la función dada posea derivadas continuas de todos los órdenes. Tal serie representa la función si R_n tiende hacia cero, y se conoce como *serie de Taylor* para la función. En condiciones normales, se reemplazan $a + h$ por $b + k$ por y en la serie de Taylor que resulta de (3.4), con lo cual se expresa $f(x, y)$ como serie de productos de potencias de $x - a$ y $y - b$.

Problema 3.1 Si $f(x, y) = x^2y + 2xy^2$ y si $a = 1$, $h = 2$, $b = 2$, $k = 1$, encontrar θ en el teorema del valor medio:

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(a+\theta h, b+\theta k), \quad 0 < \theta < 1. \tag{3.7}$$

Solución. Al sustituir los valores dados, el miembro izquierdo de (3.7) se convierte en

$$\begin{aligned} f(1+2, 2+1) - f(1, 2) &= f(3, 3) - f(1, 2) \\ &= (27+54) - (2+8) = 71. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x, y) &= 2f_x(x, y) + f_y(x, y) \\ &= 2(2xy+2y^2) + (x^2+4xy) = x^2+8xy+4y^2. \end{aligned}$$

Si ponemos $x = a + \theta h = 1 + 2\theta$, $y = b + \theta k = 2 + \theta$, e igualamos los dos miembros de (3.7), obtenemos

$$(1+2\theta)^2+8(1+2\theta)(2+\theta)+4(2+\theta)^2 = 71,$$

es decir,

$$12\theta^2+30\theta-19 = 0,$$

$$\theta = [-15 \pm \sqrt{(553)}]/12.$$

Pero $0 < \theta < 1$, lo cual indica que debemos tomar el signo positivo. Encontramos que, aproximadamente, $\theta = 0.710$. □

Problema 3.2 Desarrollar $e^{2x}\cos y$ como una serie de Taylor alrededor de $x = 0$, $y = 0$, hasta términos de tercer grado.

Solución. La proposición del problema significa que debemos tomar $a = 0$, $b = 0$ en la notación adoptada en esta sección. Así obtendremos una fórmula aproximada para la función dada para valores pequeños de x y y.

La serie de Taylor para $f(x, y)$ en las inmediaciones de $(0, 0)$ es

$$f(x,y) = f(0,0) + xf_x + yf_y + \frac{1}{2!}(x^2f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2f_{yy}) + \cdots, \quad (3.8)$$

donde todas las derivadas se evalúan en $(0, 0)$. En este punto, $(0,0)$, encontramos mediante cálculos sencillos los siguientes valores para $f(x, y) = e^{2x}\cos y$ y sus derivadas parciales hasta de tercer orden:

$$\begin{aligned} f &= 1, \quad & f_x &= 2, \quad & f_y &= 0, \\ f_{xx} &= 4, \quad & f_{xy} &= 0, \quad & f_{yy} &= -1, \\ f_{xxx} &= 9, \quad & f_{xxy} &= 0, \quad & f_{xyy} &= -2, \quad & f_{yyy} &= 0, \end{aligned}$$

La sustitución de (3.8) conduce a la serie de Taylor que buscamos:

$$e^{2x}\cos y = 1 + 2x + \frac{1}{2!}(4x^2 - y^2) + \frac{1}{3!}(8x^3 - 6xy^2) + \cdots \quad \square \quad (3.9)$$

Problema 3.3 ¿Cómo puede modificarse la serie dada en (3.9) a fin de que termine con los términos de tercer grado en x y y, mientras la ecuación se conserva exacta?

Solución. Aquí hemos de sustituir los términos de tercer grado por el residuo R_2. Con $a = b = 0$ en (3.5) y poniendo (x, y) en lugar de (h, k), una vez efectuadas las derivaciones necesarias, tenemos:

$$R_2 = \frac{1}{3!}(x^3f_{xxx} + 3x^2yf_{xxy} + 3xy^2f_{xyy} + y^3f_{yyy}) \quad (3.10)$$

(por desarrollo del operador), donde se evalúan todas las derivadas en $(\theta x, \theta y)$ y $0 < \theta < 1$.

Al derivar $f(x, y) = e^{2x}\cos y$, obtenemos en (x, y):

$$\begin{aligned} f_{xxx} &= 8e^{2x}\cos y, \quad & f_{xxy} &= -4e^{2x}\operatorname{sen} y, \\ f_{xyy} &= -2e^{2x}\cos y, \quad & f_{yyy} &= e^{2x}\operatorname{sen} y, \end{aligned}$$

Al sustituir (x, y) por $(\theta x, \theta y)$ y llevar esto a (3.10),

$$R_2 = \frac{1}{3!}[x^3(8\cos\theta y) + 3x^2y(-4\operatorname{sen}\theta y) + 3xy^2(-2\cos\theta y) + y^3(\operatorname{sen}\theta y)]e^{2\theta x}$$

$$= \frac{1}{3!}[(8x^3 - 6xy^2)\cos\theta y - (12xy^2 - y^3)\operatorname{sen}\theta y]e^{2\theta x}. \quad \square$$

Problema 3.4 Encontrar la serie de Taylor para $f(x, y) = e^{x^2 \operatorname{sen} xy}$ alrededor del punto (2, 0) hasta los términos de segundo grado. De ahí obténgase un valor aproximado para $f(1.98, 0.015)$.

Solución. En (2, 0), encontramos que

$$f = 1, \quad f_x = 0, \quad f_y = 8,$$
$$f_{xx} = 0, \quad f_{xy} = 12, \quad f_{yy} = 64.$$

Por lo tanto, la serie de Taylor para $f(x, y)$ alrededor de (2, 0) es

$$f(x, y) = f(2, 0) + (x-2)f_x(2, 0) + yf_y(2, 0) + \frac{1}{2!}[(x-2)^2 f_{xx}(2, 0) + 2(x-2)yf_{xy}(2, 0) + y^2 f_{yy}(2, 0)] + \cdots$$
$$= 1 + 8y + 12(x-2)y + 32y^2 + \cdots$$

Al reemplazar x por $2 + \Delta x$ y y por Δy, en la última ecuación obtenemos

$$f(2+\Delta x, \Delta y) = 1 + 8\,\Delta y + 12\,\Delta x\,\Delta y + 32\,\Delta y^2 + \cdots$$

La aproximación requerida, resulta al poner $\Delta x = -0.02$, $\Delta y = 0.015$, con lo cual, si consideramos despreciables los términos de orden superior al segundo en Δx, Δy,

$$f(1.98, 0.015) = 1 + (8 + 12\,\Delta x + 42\,\Delta y)\Delta y$$
$$= 1 + (8 - 0.24 + 0.48)(0.015) = 1.124,$$

hasta tres cifras decimales. Podemos comparar esto con el valor exacto, hasta cuatro cifras decimales, 1.1235. $\square$

Debemos observar que la serie de Taylor representa una función dada tan sólo cuando el término residual R_n de (3.1) tiende hacia cero, al tender n hacia el infinito. *No* es suficiente la convergencia de la serie infinita. Por ejemplo, la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-1/(x^2+y^2)}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

posee derivadas parciales continuas de todos los órdenes en (0, 0), y todas se anulan en el punto en cuestión. (Se calculan a partir de los principios.) En consecuencia, la serie de Taylor alrededor de (0, 0) para esta función es idénticamente cero, y no representa $f(x, y)$.

Sin embargo, en casi todos los casos prácticos, si la serie de Taylor converge, representa la función. En esos casos, el método del problema 3.4 conducirá a una aproximación satisfactoria si se usa un número suficiente de términos.

3.2 Máximos y mínimos Supongamos que se ha definido $f(x, y)$ en una región R que contiene a (x_0, y_0) como punto interior. Entonces, se dice que f tiene un *máximo absoluto* en (x_0, y_0) si

$$f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0) \tag{3.11}$$

para todo punto (x, y) en R. Si se invierte el sentido de la desigualdad en (3.11), entonces f tiene un *mínimo absoluto* en (x_0, y_0). Los máximos o mínimos absolutos se llaman *extremos absolutos.*

A menudo, suelen interesarnos más los extremos *relativos,* es decir, casos en donde sólo se requiere que la desigualdad se cumpla para puntos (x, y) en una vecindad de (x_0, y_0). Así, diremos que f tiene un *máximo relativo* en (x_0, y_0) si el incremento

$$\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) \leqslant 0 \tag{3.12}$$

para todo punto (x, y) en R con la propiedad de que

$$|x - x_0| < h, \qquad |y - y_0| < h,$$

para algún h suficientemente pequeño $(h > 0)$. Para el caso de un *mínimo relativo* se aplica una definición correspondiente, y ambas

definiciones permiten extensiones directas hacia funciones de más de dos variables.

En los problemas siguientes, supondremos que las funciones son continuas y poseen derivadas continuas de todos los órdenes necesarios.

Problema 3.5 Demostrar que si $f(x, y)$ tiene un extremo relativo en (x_0, y_0), entonces tanto f_x como f_y se anulan en este punto.

Solución. Trabajaremos con el caso en el cual f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0); en el caso de un mínimo relativo no habría sino que invertir ciertas desigualdades en el argumento.

Consideremos (3.12) con y constante en el valor y_0. Tenemos:

$$f(x, y_0) - f(x_0, y_0) \leqslant 0,$$

cuando $|x - x_0| < h$, donde h es algún número positivo. En consecuencia, la función $F(x) = f(x, y_0)$ tiene un máximo relativo (en el contexto del cálculo de una variable) en $x = x_0$. De conocimientos teóricos elementales se deduce que $F'(x_0) = 0$, es decir, $f_x(x_0, y_0) = 0$.

De la misma manera, si mantenemos x en el valor constante x_0, encontramos que la función $G(y) = f(x_0, y)$ tiene un máximo relativo en $y = y_0$, de donde $G'(y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$. De ahí se deduce el resultado. □

Problema 3.6 Encontrar el punto del plano $x + 2y - 3z = 4$ más próximo al origen.

Solución. Vamos a denotar por l la distancia de un punto general $P(x, y, z)$ desde el origen, así que $l^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Si P está en el plano en cuestión, tenemos, una vez sustituida z,

$$l^2 = x^2 + y^2 + \frac{1}{9}(x + 2y - 4)^2.$$

La naturaleza del problema nos indica claramente que l^2 de la última ecuación debe poseer un mínimo (tanto absoluto como relativo); éste debe ocurrir donde

$$\frac{\partial l^2}{\partial x} = 2x + \frac{2}{9}(x + 2y - 4) = 0, \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial l^2}{\partial y} = 2y+\tfrac{4}{9}(x+2y-4) = 0, \tag{3.14}$$

es decir,

$$5x+y = 2, \qquad 2x+13y = 8,$$

de donde $x = \frac{2}{7}$, $y = \frac{4}{7}$.

Como ésta es la única solución de (3.13), (3.14), debe corresponder al punto que se busca. A continuación, la ecuación del plano nos permite hallar que $z = -6/7$ para estos valores de x y y, de modo que el punto más próximo al origen está dado por

$$x = \tfrac{2}{7}, \quad y = \tfrac{4}{7}, \quad z = -\tfrac{6}{7}. \qquad \square$$

Un *punto crítico* de la función $f(x, y)$ es un punto (x_0, y_0) en el cual $f_x = f_y = 0$. En un punto así, el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ es horizontal. El problema siguiente nos muestra que un punto crítico no siempre corresponde a un extremo relativo.

Problema 3.7 Encontrar los puntos críticos de la función $f(x, y) = y^2 - x^2$, y demostrar que la función no tiene extremos relativos.

Solución. Las ecuaciones $f_x = 0$, $f_y = 0$ dan $x = y = 0$ como el único punto crítico. Ahora bien, a lo largo de la recta $y = 0$, tenemos

$$\Delta f = f(x, 0) - f(0, 0) = -x^2 \leqslant 0,$$

mientras que, a lo largo de la recta $x = 0$,

$$\Delta f = f(0, y) - f(0, 0) = y^2 \geqslant 0.$$

En consecuencia, el signo de Δf depende de la dirección del punto (x, y) desde el punto $(0, 0)$, así que no puede corresponder a un máximo o a un mínimo relativo. Como no hay otro punto crítico, hemos establecido la validez del resultado.

Observamos que la función $f(x, 0)$, como función de una sola variable, tiene un máximo en $x = 0$, mientras que la función $f(0, y)$ tiene un mínimo en $y = 0$. En la figura 3.1 se muestra una parte de la superficie $z = f(x, y)$. $\square$

Cuando el signo de Δf en (3.12) depende de la dirección del punto $Q(x, y)$ a partir de un punto crítico $P(x_0, y_0)$, como en el

problema anterior, el punto crítico se llama *punto silla*. Estos puntos pueden ser más complicados que el representado en la figura 3.1. Por ejemplo, el comportamiento de f a lo largo de PQ puede alternarse muchas veces a medida que PQ ejecuta una vuelta completa alrededor de P.

Problema 3.8 Sea $P(x_0, y_0)$ un punto crítico de $f(x, y)$, y denotemos por r, s, t los valores respectivos de f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} en P.

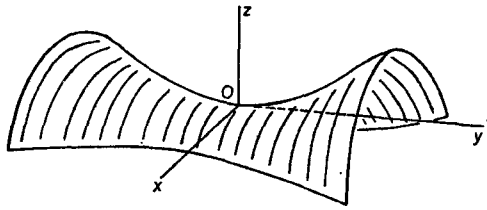

Figura 3.1

(i) Demostrar que una condición suficiente para que P sea un punto extremo relativo es que

$$D \equiv rt - s^2 > 0. \tag{3.15}$$

(ii) Si $D > 0$, demostrar que el extremo es un máximo cuando $r < 0$ (ó $t < 0$) y un mínimo cuando $r > 0$ (ó $t > 0$).

(iii) Si $D < 0$, demostrar que el extremo es un punto silla.

Solución. (i) Como $f_x = f_y = 0$ en el punto crítico P, el desarrollo de Taylor de $f(x, y)$ alrededor de P resulta en, con $x - x_0 = l$, $y - y_0 = m$,

$$\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) = \tfrac{1}{2}(l^2 f_{xx} + 2lmf_{xy} + m^2 f_{yy}), \tag{3.16}$$

donde se evalúa el segundo miembro en $x = x_0 + \theta l$, $y = y_0 + \theta m$, y $0 < \theta < 1$. Demostraremos que $\Delta f \neq 0$ para todos los valores suficientemente pequeños de l y m (sin ser ambos cero), cuando $D > 0$. Esto significa que Δf no puede cambiar de signo en las inmediaciones de P (suponiendo que las segundas derivadas de f son continuas) y tendremos un máximo relativo en P si Δf es negativo y un mínimo relativo si Δf es positivo.

En efecto, si se anulara Δf y si $m \neq 0$, obtendríamos a partir de (3.16), al dividir entre $\frac{1}{2}m^2$, que la ecuación cuadrática

$$(l/m)^2 f_{xx} + 2(l/m) f_{xy} + f_{yy} = 0 \tag{3.17}$$

tiene raíces reales para l/m, de donde

$$f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 \leqslant 0. \tag{3.18}$$

En caso de que $m = 0$, podemos dividir (3.16) entre $\frac{1}{2}l^2$ a fin de obtener (3.18). Pero la desigualdad (3.18) no puede satisfacerse cerca de P, porque $rt - s^2 > 0$ y el primer miembro de (3.18) es continuo. Por lo tanto, Δf no es cero cerca de P, por lo cual debe ser un extremo relativo.

(ii) Como $rt - s^2 > 0$, r y t no se anulan y tienen el mismo signo. Si ponemos $m = 0$, $l \neq 0$ en (3.16), vemos que el signo de Δf es el mismo que el de f_{xx}, y, por la continuidad, éste es el signo de r. Por consiguiente, $r < 0$ (ó $t < 0$) corresponde a un máximo relativo, y $r > 0$ (ó $t > 0$) a un mínimo relativo.

(iii) Si $D < 0$, (3.18) se verifica cerca de P. Por lo tanto, (3.17) tiene raíces reales para l/m. (Si $m = 0$, se considera la ecuación cuadrática correspondiente en m/l.) Por consiguiente, el primer miembro de (3.17) cambia de signo cuando varía la razón l/m de modo que pase por una de las raíces de la ecuación. Por (3.16), Δf cambia también de signo, lo cual demuestra que P es punto silla. Observe el lector que l/m determina la dirección de $Q(x, y)$ desde $P(x_0, y_0)$.

Cuando $D = 0$, se precisa otro criterio para determinar la naturaleza de un punto crítico. □

Problema 3.9 Encontrar e identificar todos los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = y^3 + 3x^2y - 3x^2 - 3y^2 + 2.$$

Solución. Al poner $f_x = f_y = 0$, encontramos que

$$x(y-1) = 0, \quad y(y-2) + x^2 = 0.$$

La primera de estas ecuaciones resulta en $x = 0$ ó $y = 1$, y por medio de la segunda, encontramos que los puntos críticos son

$$(0, 0), \quad (0, 2), \quad (1, 1), \quad (-1, 1).$$

Ahora bien,

$$f_{xx} = 6(y-1), \quad f_{xy} = 6x, \quad f_{yy} = 6(y-1),$$

de donde

$$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 36[(y-1)^2 - x^2].$$

Por lo tanto:

en $(0, 0)$, $D = 36 > 0$, $r = -6 < 0$, y f tiene un máx. rel.,
en $(0, 2)$, $D = 36 > 0$, $r = 6 > 0$, y f tiene un mín. rel.,
en $(1, 1)$, $D = -36 < 0$, y f tiene un punto silla,
en $(-1, 1)$, $D = -36 < 0$, y f tiene un punto silla. □

Problema 3.10 Se quiere construir una cisterna metálica y abierta para agua, con un triángulo rectángulo como base y lados verticales. Si el volumen de la cisterna debe ser de 2 m³, ¿qué diseño redundará en la menor área de metal?

Solución. Denotemos los lados perpendiculares de la base triangular por x m y y m, respectivamente, y supongamos que la altura es z m. Entonces, el área total de la superficie es

$$S = \tfrac{1}{2}xy + xz + yz + (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}z. \tag{3.19}$$

Pero el volumen debe ser 2, así que

$$2 = \tfrac{1}{2}xyz, \qquad \text{o sea} \qquad z = 4/xy.$$

Sustituyendo este valor de z en (3.19)

$$S = \tfrac{1}{2}xy + 4[x + y + (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}]/xy. \tag{3.20}$$

Para determinar un extremo, a partir de la última ecuación tenemos que

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \tfrac{1}{2}y - \frac{4}{x^2}\left[1 + \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right] = 0, \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = \tfrac{1}{2}x - \frac{4}{y^2}\left[1 + \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right] = 0. \tag{3.22}$$

Al multiplicar (3.21) por x^2, (3.22) por y^2 y restar,

$$(x-y)[\tfrac{1}{2}xy + 4(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}] = 0.$$

La expresión dentro de los corchetes no puede anularse por ser positivos x y y, así que debemos tener $x = y$. Si sustituimos x por y en (3.21), obtenemos

$$y^3 = 8(1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}),$$

de suerte que

$$y = x = 2(1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} = 2.39 \text{ (aprox.)}.$$

Por lo tanto,

$$z = 4/xy = (1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2})^{-\frac{1}{3}} = 0.700 \text{ (aprox.)},$$

y la mínima área superficial de la cisterna es, por (3.20),

$$S = 6(1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} = 8.57 \text{ m}^2,$$

aproximadamente. Esta cantidad representa la mínima área de metal que se precisa.

De la naturaleza del problema, hemos logrado deducir que el único punto crítico de S, como una función de x y y, debe ser un mínimo. Esto puede verificarse mediante el método de los últimos dos problemas. En efecto, cuando $y = x$, encontramos fácilmente que

$$S_{xx} = S_{yy} = (8+5\sqrt{2})/x^3, \qquad S_{xy} = (4+\sqrt{2})/x^3,$$

de donde

$$S_{xx}S_{yy} - (S_{xy})^2 > 0, \qquad S_{xx} > 0,$$

lo cual demuestra que un punto crítico para el que $y = x$ es, sin lugar a dudas, un mínimo. □

Cuando D vale cero en un punto crítico, el criterio anterior no puede aplicarse. Un caso frecuente es aquel donde $r = s = t = 0$. Entonces, el signo de Δf depende de los términos que contienen la tercera derivada en el desarrollo de Taylor de $f(x, y)$ alrededor del punto crítico, (x_0, y_0). El examen minucioso de estos términos nos muestra que no existe extremo relativo a menos que todos valgan cero; en ese caso, es preciso investigar los términos con derivadas de cuarto orden a fin de completar la prueba.

Problema 3.11 Verificar que $f(x, y) = x^2y^2(x + y + 1) - 1$ tiene un punto crítico en $(0, 0)$, y determinar su naturaleza.

Solución. En (0, 0), tenemos:

$$f_x = 2xy^2(x+y+1) + x^2y^2 = 0,$$
$$f_y = 2x^2y(x+y+1) + x^2y^2 = 0,$$

así que $P(0, 0)$ es un punto crítico.

Al volver a derivar observamos que todas las derivadas de segundo orden se anulan en este punto, así que $D = 0$. Las derivadas de tercer orden también se hacen cero en (0, 0), y lo mismo sucede con las de cuarto orden, salvo

$$\partial^4 f/\partial x^2\,\partial y^2 = 12(x+y)+4 = 4.$$

El desarrollo de Taylor de $f(x, y)$ es

$$\Delta f = f(x, y) - f(0, 0) = x^2y^2[1+5(\theta x+\theta y)],$$

donde $0 < \theta < 1$, habiendo obtenido la expresión entre corchetes al evaluar las cuartas derivadas de f en $(\theta x, \theta y)$. Como Δf es positivo para todos los valores pequeños de x y y, f tiene un mínimo relativo en (0, 0). (Este resultado puede obtenerse también mediante una inspección de f.) □

Una función $f(x, y, z)$ de tres variables tiene un máximo relativo en $P(x_0, y_0, z_0)$ si

$$\Delta f = f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) \leqslant 0$$

siempre que $|x - x_0| < h$, $|y - y_0| < h$, $|z - z_0| < h$, para valores suficientemente pequeños de h. Para un mínimo relativo se aplica una definición correspondiente. Una condición necesaria es que P sea un punto crítico, es decir, que todas las primeras derivadas parciales de f se anulen en el punto en cuestión.

Una generalización del criterio D es, como condición suficiente para un mínimo, que

$$f_{xx} > 0. \quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix} > 0, \qquad (3.23)$$

mientras que si se invierten los signos de desigualdad, empezando con $f_{xx} < 0$, entonces el punto crítico es un máximo. Este resultado se extiende a cualquier número de variables.

Problema 3.12 Encontrar e identificar los puntos críticos de

$$f(x, y, z) = e^{x+y+z}/(1+e^x)(e^x+e^y)(e^y+e^z)(1+e^z).$$

Solución. Si derivamos con respecto a x, considerando f como un producto de cinco factores, obtenemos

$$f_x = f - \frac{e^x}{1+e^x} f - \frac{e^x}{e^x+e^y} f,$$

que tan sólo se anula (ya que $f \neq 0$) cuando

$$(1+e^x)(e^x+e^y) = e^x[(e^x+e^y)+1+e^x],$$

es decir, $e^{2x} = e^y$, lo cual implica que $y = 2x$.

Por simetría, $f_z = 0$ cuando $y = 2z$, y un cálculo semejante resulta en

$$f_y = f - \frac{e^y}{e^x+e^y} f - \frac{e^y}{e^y+e^z} f,$$

de donde encontramos $f_y = 0$ cuando $2y = x + z$.

Por lo tanto, los puntos críticos se determinan mediante las ecuaciones simultáneas

$$y = 2x, \quad y = 2z, \quad 2y = x+z,$$

cuya única solución es $x = y = z = 0$.

Aquí, podemos obtener mediante cálculos directos

$$f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = -\frac{1}{32},$$

$$f_{xy} = f_{yz} = \frac{1}{64}, \quad f_{xz} = 0.$$

Aplicando el criterio (3.23), encontramos

$$f_{xx} < 0, \quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = (-\tfrac{1}{32})(-\tfrac{1}{32}) - (\tfrac{1}{64})^2 > 0,$$

mientras que el determinante de 3×3 en (3.23) resulta tener el valor (después de extraer un factor $\frac{1}{64}$ de cada elemento)

$$\frac{1}{(64)^3}\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{-4}{(64)^3} < 0.$$

En consecuencia, f tiene un máximo relativo en $(0, 0, 0)$. □

3.3 Restricciones; multiplicadores indeterminados Supongamos que necesitamos encontrar los extremos de una función $f(x, y, z)$ donde x, y y z no son variables independientes, sino que están sujetas a una condición o *restricción*: $g(x, y, z) = 0$. En algunos casos, podemos valernos de la ecuación restrictiva para eliminar una de las variables de f, como se hizo en los problemas 3.6 y 3.10. Pero en otros casos tal eliminación resulta imposible, y conviene recurrir al método de un *multiplicador indeterminado.*

En este método se utiliza el hecho de que si f posee un extremo en un punto particular bajo la restricción dada, entonces también lo posee la función $\phi = f + \lambda g$, donde λ es una constante arbitraria, porque el término adicional es cero. Si consideramos x y y como variables independientes, con z determinada por la ecuación $g = 0$, entonces la condición necesaria para un extremo de $\phi(x, y, z)$ es

$$\phi_x + \phi_z z_x = 0, \quad \phi_y + \phi_z z_y = 0. \tag{3.24}$$

Vamos a escoger ahora λ de suerte que $\phi_z = 0$ en el extremo, de donde, por (3.24), obtenemos $\phi_x = 0$, $\phi_y = 0$, es decir,

$$f_x + \lambda g_x = 0, \quad f_y + \lambda g_y = 0, \quad f_z + \lambda g_z = 0. \tag{3.25}$$

Al resolver problemas, escribimos estas ecuaciones, agregando

$$g = 0 \tag{3.26}$$

y las cuatro relaciones de (3.25) y (3.26) que determinan x, y, z, λ. En casi todos los casos, el valor de λ no interesa; entonces podemos dejarlo *indeterminado.* Observamos que la elección de λ de modo que $\phi_z = 0$ sólo entraña la condición de que $g_z \neq 0$; de lo contrario, se pueden obtener los resultados anteriores si se escoge x ó y en lugar de z como variable dependiente.

Problema 3.13 Tenemos una caja rectangular contenida exactamente dentro del elipsoide $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 18$, con cada arista paralela a uno de los ejes de coordenadas. Encontrar su máximo volumen posible.

Solución. El elipsoide es simétrico respecto a cada uno de los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, y sus ejes principales son segmentos de los ejes de coordenadas. Por simetría, se deduce que los vértices de la caja están todos sobre el elipsoide y sus coordenadas serán de la forma $(\pm x, \pm y, \pm z)$, donde

$$g(x, y, z) \equiv 2x^2+3y^2+z^2-18 = 0. \tag{3.27}$$

El volumen de la caja es $V = 8xyz$, y buscamos el valor máximo de V sujeto a la restricción (3.27). Las ecuaciones que corresponden a (3.25), con V en lugar de f, son

$$8yz+4\lambda x = 0, \tag{3.28}$$

$$8xz+6\lambda y = 0, \tag{3.29}$$

$$8xy+2\lambda z = 0. \tag{3.30}$$

Si multiplicamos las tres últimas ecuaciones respectivamente por x, y y z, y si restamos la segunda de la primera y la tercera de la segunda, nos queda:

$$\lambda(4x^2-6y^2) = 0, \quad \lambda(6y^2-2z^2) = 0. \tag{3.31}$$

Como $y > 0$, $z > 0$, tenemos que $\lambda \neq 0$, por (3.28). En consecuencia, por (3.31),

$$z^2 = 3y^2 = 2x^2. \tag{3.32}$$

Si ponemos en (3.27) los valores de x y y dados por (3.32), obtenemos $z^2 = 6$, así que

$$x = \sqrt{3}, \quad y = \sqrt{2}, \quad z = \sqrt{6}, \tag{3.33}$$

de donde

$$V = 8xyz = 48.$$

Como tan sólo existe un punto crítico para valores positivos de x, y y z, vemos que la última ecuación determina el volumen máximo posible de la caja.

Por interés, podemos determinar también el valor de λ. Por (3.28), (3.33), encontramos que $\lambda = -4$. □

El método de los multiplicadores se aplica, con modificaciones, al problema de encontrar los puntos críticos de una función de un número cualquiera de variables, sujetas a cualquier número inferior de restricciones. Si, como antes, tenemos tres variables x, y, z pero éstas sujetas a dos restricciones independientes de la forma $g(x, y, z) = 0$, $h(x, y, z) = 0$, entonces las ecuaciones para determinar los puntos críticos de $f(x, y, z)$ son

$$f_x + \lambda g_x + \mu h_x = 0, \tag{3.34}$$

$$f_y + \lambda g_y + \mu h_y = 0, \tag{3.35}$$

$$f_z + \lambda g_z + \mu h_z = 0, \tag{3.36}$$

$$g = 0, \qquad h = 0. \tag{3.37}$$

Aquí tenemos dos multiplicadores indeterminados, λ y μ. Su número siempre es igual al número de restricciones.

Problema 3.14 Encontrar la distancia más corta desde el origen hasta la recta de intersección de los dos planos $lx + my + nz = p$, $l'x + m'y + n'z = p'$, donde $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, $l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1$.

Solución. Debemos encontrar el mínimo de la expresión $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, el cuadrado de la distancia del punto (x, y, z) al origen bajo las ecuaciones restrictivas de los dos planos dados. En consecuencia, correspondiendo a (3.34), ..., (3.37), tenemos

$$2x + \lambda l + \mu l' = 0, \tag{3.38}$$

$$2y + \lambda m + \mu m' = 0, \tag{3.39}$$

$$2z + \lambda n + \mu n' = 0, \tag{3.40}$$

$$lx + my + nz - p = 0, \qquad l'x + m'y + n'z - p' = 0. \tag{3.41}$$

Estas ecuaciones determinan x, y, z en un punto crítico, junto con λ y μ. Sin duda, el punto crítico debe corresponder a un mínimo para r^2.

Al multiplicar (3.38), (3.39), (3.40) respectivamente por x, y, z y sumar, obtenemos:

$$2r^2 + \lambda p + \mu p' = 0.$$

Multiplicando las mismas ecuaciones por l, m, n y sumando,

$$2p+\lambda+\mu k = 0,$$

donde $k = ll' + mm' + nn'$. Por último, al multiplicar respectivamente las ecuaciones por l', m', n' y sumar:

$$2p'+\lambda k+\mu = 0.$$

Eliminamos λ y μ de las tres últimas ecuaciones, y obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 2r^2 & p & p' \\ 2p & 1 & k \\ 2p' & k & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

lo cual, una vez desarrollado, da

$$r^2(1-k^2) - p(p-kp') + p'(pk-p') = 0.$$

Al resolver para r, obtenemos la distancia mínima que se desea

$$r = [(p^2+p'^2-2kpp')/(1-k^2)]^{\frac{1}{2}}.$$

El lector familiarizado con la geometría analítica reconocerá $|p|$ y $|p'|$ como las distancias perpendiculares de los planos respectivos al origen, y que $k = ll' + mm' + nn' = \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre los dos planos, cuyas normales tienen los cosenos directores (l, m, n) y (l', m', n'). □

3.4 Envolventes Las familias de curvas y superficies poseen frecuentemente lugares geométricos conocidos con el nombre de *envolventes*, que revisten importancia sobre todo en la teoría de las ecuaciones diferenciales.

Si todo miembro de una familia uniparamétrica de curvas planas es tangente a una determinada curva C en el plano, entonces C se llama envolvente de la familia. Por ejemplo, la familia de rectas

$$x \cos a + y \operatorname{sen} a = 1, \tag{3.42}$$

donde a es el parámetro, están todas a una distancia perpendicular unitaria desde el origen. Por lo tanto, todas estas rectas tocan la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, que es la envolvente de (3.42).

Las rectas $P'Q$, $P'R$ de la figura 3.2 corresponden a los valores paramétricos a, $a + h$. El punto de intersección P' está dado por las ecuaciones simultáneas

$$\phi(x, y, a) \equiv x \cos a + y \operatorname{sen} a - 1 = 0, \tag{3.43}$$

$$\phi(x, y, a+h) = 0. \tag{3.44}$$

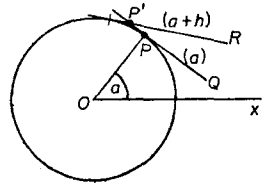

Figura 3.2

Si restamos y dividimos entre h, obtenemos, aplicando el teorema del valor medio,

$$h^{-1}[\phi(x, y, a+h) - \phi(x, y, a)] = \phi_a(x, y, a+\theta h) = 0, \tag{3.45}$$

donde $0 < \theta < 1$. Al tomar el límite cuando h tiende hacia cero, obtenemos la posición límite de P', que es el punto de contacto P del miembro a con la envolvente C. Por consiguiente, las coordenadas de P se determinan mediante las ecuaciones simultáneas

$$\phi(x, y, a) = 0, \quad \phi_a(x, y, a) = 0. \tag{3.46}$$

La ecuación de la envolvente se obtiene al eliminar a con el concurso de ambas ecuaciones. El resultado se aplica en general a una familia $\phi(x, y, a) = 0$.

Por ejemplo, en el caso (3.43), la segunda relación de (3.46) es

$$-x \operatorname{sen} a + y \cos a = 0,$$

de suerte que $y = x \tan a$. Al sustituir y por esto, en (3.43), encontramos que $x = \cos a$, así que las coordenadas de P son $x = \cos a$. $y = \operatorname{sen} a$. Al eliminar a, se obtiene la envolvente $x^2 + y^2 = 1$.

Problema 3.15 Determinar la envolvente de la familia de circunferencias

$$x^2+y^2-2ay+\tfrac{1}{2}a^2 = 0, \quad a > 0.$$

Solución. Se puede escribir la ecuación de la familia en la forma

$$\phi(x, y, a) = x^2+(y-a)^2-\tfrac{1}{2}a^2 = 0, \tag{3.47}$$

donde se ve que el miembro con parámetro a tiene centro en $(0, a)$ y radio $a/\sqrt{2}$. En correspondencia con (3.46), tenemos (3.47) y

$$\phi_a = 2(y-a)-a = 0. \tag{3.48}$$

Esto último nos conduce a establecer que $a = 2y$, así que al eliminar a entre (3.47) y (3.48) obtenemos

$$x^2-y^2 = 0$$

como ecuación de la envolvente. Es el par de rectas $y = \pm x$, que pasan por el origen con una inclinación de 45° respecto a cada eje de coordenadas. □

Problema 3.16 Describir la envolvente de la familia de esferas

$$(x-a)^2+[y-f(a)]^2+z^2 = 1, \tag{3.49}$$

donde f es una función dada. Obtener su ecuación $f(a) = 2a + 1$.

Solución. La familia se compone de esferas unitarias, y el centro del miembro con parámetro a está en el punto $x = a$, $y = f(a)$, $z = 0$. Por lo tanto, todos los centros están sobre la curva $y = f(x)$ en el plano xy. Cuando a varía, la esfera con parámetro a describe un tubo cuya sección recta es una circunferencia unitaria. Esta superficie tubular es tangente a todos los miembros de la familia (3.49) y se llama envolvente de la familia. en analogía con las envolventes de curvas planas.

Obtenemos la ecuación de la envolvente al eliminar a entre

$$\phi(x, y, z, a) = (x-a)^2+[y-f(a)]^2+z^2-1 = 0, \tag{3.50}$$

y

$$\phi_a(x, y, z, a) = -2(x-a)-2[y-f(a)]f'(a) = 0. \tag{3.51}$$

La eliminación resulta imposible mientras se considere $f(a)$ como función general. Cuando $f(a) = 2a + 1$, las dos últimas ecuaciones se reducen a

$$(x-a)^2+(y-2a-1)^2+z^2-1 = 0, \tag{3.52}$$

$$x-a+2(y-2a-1) = 0. \tag{3.53}$$

Si resolvemos la última para a y sustituimos en la primera, encontramos que la envolvente es

$$4x^2+y^2+5z^2-4xy+4x-2y-4 = 0,$$

o sea,

$$[(y-2x-1)/\sqrt{5}]^2+z^2 = 1.$$

La última forma exhibe la naturaleza de la envolvente, pues el miembro izquierdo es el cuadrado de la distancia del punto (x, y, z) desde la recta $y - 2x - 1 = 0$. Por lo tanto, la envolvente es un cilindro circular unitario, cuyo eje es la recta citada, como también puede deducirse de los comentarios generales anteriores. □

Una familia biparamétrica de superficies también puede poseer una envolvente. Supongamos, por ejemplo, que en (3.49) reemplazamos $f(a)$ por b, donde b es un parámetro independiente de a. Entonces, la nueva ecuación representaría una esfera de radio unitario con centro en $(a, b, 0)$. Cada una de tales esferas es tangente al par de planos $x = \pm 1$, que constituyen la envolvente de la familia biparamétrica.

En general, la envolvente de la familia $\phi(x, y, z, a, b) = 0$ se obtiene (cuando existe) mediante la eliminación de a y b entre las ecuaciones

$$\phi = 0, \quad \phi_a = 0, \quad \phi_b = 0. \tag{3.54}$$

Problema 3.17 Encontrar la envolvente de la familia biparamétrica de planos $z = ax + by + a^2 + b^2$.

Solución. En este caso, las ecuaciones de (3.54) son

$$z-ax-by-a^2-b^2 = 0, \quad -x-2a = 0, \quad -y-2b = 0.$$

A partir de las dos últimas, encontramos que $a = -\frac{1}{2}x$, $b = -\frac{1}{2}y$, y al sustituir en la primera, obtenemos la ecuación que se busca:

$$z = -\tfrac{1}{4}(x^2+y^2),$$

lo cual demuestra que la envolvente es el paraboloide de revolución obtenido por la rotación de la parábola $z = -\frac{1}{4}x^2$, $y = 0$ alrededor del eje z.

EJERCICIOS

1. Desarrollar $xy^3 + x^2 + xy - 1$ en potencias de $x - 1$ y $y + 2$ por medio del teorema de Taylor.

2. Desarrollar $(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}$ como una serie de Taylor en potencias de x y y hasta los términos de cuarto grado. Verificar el resultado mediante el teorema del binomio.

3. Encontrar e identificar los puntos críticos de $f(x, y) = e^{-x^2}(2xy + y^2)$.

4. Encontrar e identificar los puntos críticos de $u = 5x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2z$ con el criterio D generalizado (3.23).

5. Encontrar las distancias máxima y mínima desde el origen hasta la superficie $(x/a)^4 + (y/b)^4 + (z/c)^4 = 1$, donde $a > b > c > 0$.

6. Sabiendo que $u = x^2 + 2y^2 + z^2 + t^2$ posee un mínimo bajo las restricciones $2x - y + z + 2t = 4$, $x + 3y - z + t = 2$, encontrar su ubicación.

7. Encontrar la envolvente de la familia de superficies $ax + (y - a)^2 + (z + a)^2 = 0$.

8. Encontrar la envolvente de la familia de todas las esferas que pasan por el origen con centros en la parábola $y^2 = 4x$, $z = 0$.

9. Obtener la envolvente de la familia biparamétrica de planos $lx + my + nz = 1$, donde l, m y n son constantes positivas que satisfacen la condición $lmn = \frac{1}{27}$.

CAPITULO 4

Integrales múltiples

4.1 Integrales dobles y repetidas Consideremos una función $f(x, y)$ definida en una región cerrada y acotada del plano xy. Sea R dividida en n subregiones, denotemos el área de la i-ésima subregión por $\Delta A_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ y por f_i el valor de f en un punto arbitrario (x_i, y_i) de tal subregión. Si la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \Delta A_i$$

se aproxima a un límite finito cuando las dimensiones de cada subregión se vuelven infinitamente pequeñas (y n tiende hacia el infinito), tal límite se llama *integral doble* de $f(x, y)$ sobre R. Aquí, suponemos que el límite es independiente de la forma en la cual se subdivide R y de la elección particular de los puntos (x_i, y_i). (Esto se verifica siempre que f es una función *continua.*) La integral doble se simboliza por

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f_i \Delta A_i. \tag{4.1}$$

Como ejemplo de lo anterior, supongamos que una fina lámina de metal ocupa la región R, y que la densidad (masa por unidad de área) en la vecindad del punto (x, y) es $\sigma(x, y)$. Entonces, en nuestra lámina tendremos:

(i) área $= \iint_R dA$,

(ii) masa $= \iint_R \sigma \, dA$,

(iii) momento de inercia alrededor de $Oy = \iint_R x^2 \sigma dA$,

(iv) momento polar de inercia alrededor de $O = \iint_R (x^2+y^2)\sigma dA$,

y así sucesivamente.

Si la subdivisión de R es rectangular, como en la figura 4.1, con el área común de cada rectángulo como $\Delta A_i = \Delta x \, \Delta y$, por ejemplo, se nos sugiere la idea de expresar la integral doble (4.1) en la forma

$$I = \iint_R f(x, y) \, dx \, dy. \tag{4.2}$$

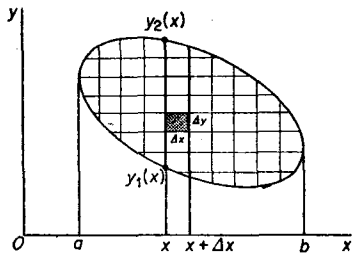

Figura 4.1

Se puede llevar a cabo la suma sobre los rectángulos, primero sobre una faja paralela a Oy, seguida por una suma sobre todas esas fajas. Este procedimiento nos conduce a expresar I como una *integral repetida*. Supongamos que cada recta $x = \text{const.}$ que cruza la frontera de R lo hace precisamente en dos puntos, donde $y = y_1(x)$, y $y = y_2(x)$, $(y_1 < y_2)$. Entonces,

$$I = \int_a^b \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, dy \right\} dx, \tag{4.3}$$

donde a y b son los valores menor y mayor de x en R.

De la misma manera, si cada recta $y = \text{const.}$ que cruza la frontera de R lo hace precisamente en dos puntos, donde $x = x_1(y)$ y $x = x_2(y)$, $(x_1 < x_2)$, entonces, obtenemos otra forma de la integral en la expresión anterior, obtenemos otra forma de la integral repetida:

$$I = \int_c^d \left\{ \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx \right\} dy, \tag{4.4}$$

donde c y d son los valores menor y mayor de y en R.

Si R no posee las propiedades que hemos supuesto para aplicar (4.3) y (4.4), tal vez podamos descomponer R en un número finito de partes tales que la aportación de cada parte a I es, por separado, de la forma (4.3) ó (4.4). Esto nos permite expresar I como una suma de esos términos.

En (4.3) y (4.4) pueden omitirse las llaves. Algunos autores intercambian el orden de dx y dy una vez que se retiran las llaves; en esta obra no procederemos así.

Problema 4.1 Si R es el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 2$, expresar la integral doble de $x^2y^2(x^2 - y^3)$ sobre R como una integral repetida en dos formas distintas, y evaluar cada una de ellas.

Solución. Si empezamos a integrar respecto a y, con x constante, obtenemos

$$I = \iint_R x^2y^2(x^2-y^3)\, dx\, dy = \int_0^1 \left\{ \int_{-1}^2 x^2y^2(x^2-y^3)\, dy \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_{-1}^2 (x^4y^2 - x^2y^5)\, dy \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left| \tfrac{1}{3}x^4y^3 - \tfrac{1}{6}x^2y^6 \right|_{y=-1}^{y=2} dx$$

$$= \int_0^1 (3x^4 - \tfrac{21}{2}x^2)\, dx = -\tfrac{29}{10}.$$

Si empezamos por integrar respecto a x, con y constante,

$$I = \int_{-1}^2 \left\{ \int_0^1 (x^4y^2 - x^2y^5)\, dx \right\} dy$$

$$= \int_{-1}^2 \left| \tfrac{1}{5}x^5y^2 - \tfrac{1}{3}x^3y^5 \right|_{x=0}^{x=1} dy$$

$$= \int_{-1}^2 (\tfrac{1}{5}y^2 - \tfrac{1}{3}y^5)\, dy = -\tfrac{29}{10},$$

como antes. □

Problema 4.2 Encontrar la masa de una lámina delgada de metal situada en el cuadrante positivo del plano xy y limitada por las líneas $y = 2x + 1$, $y = x^2 + 1$, si su densidad en el punto (x, y) es x^2y.

Solución. Las líneas $y = 2x + 1$ y $y = x^2 + 1$ se cortan en los puntos (0, 1) y (2, 5). (El lector debe hacer un esquema.) Por lo tanto, la masa total está dada por la integral

$$M = \int_0^2 \int_{x^2+1}^{2x+1} x^2 y \, dy \, dx = \int_0^2 \left| \tfrac{1}{2} x^2 y^2 \right|_{y=x^2+1}^{y=2x+1} dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^2 [x^2(2x+1)^2 - x^2(x^2+1)^2] \, dx = \frac{184}{35}. \qquad \square$$

Problema 4.3 Evaluar

$$I = \int_0^a \int_x^a \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}} \, dy \, dx \tag{4.5}$$

cambiando primero el orden de integración.

Solución. Observamos que la integral resulta difícil de evaluar sin alterar el orden de integración, ya que como

$$\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}},$$

deberíamos tener

$$I = \int_0^1 \left| x \operatorname{senh}^{-1}(y/x) \right|_{y=x}^{y=a} dx$$

$$= \int_0^a [x \operatorname{senh}^{-1}(a/x) - x \operatorname{senh}^{-1} 1] \, dx,$$

lo cual no se integra con facilidad.

Al cambiar el orden, precisamos cambiar los límites. Para encontrar los nuevos límites, examinamos la región R sobre la cual se aplica la integral doble que corresponde a I. A partir de (4.5), tenemos que $x \leqslant y \leqslant a$, de suerte que R está acotada inferiormente por parte de la recta $y = x$, y acotada superiormente por parte de la

recta $y = a$. Estas rectas se cortan en (a, a) y como los límites para x son 0, a, la región R es la que vemos en la figura 4.2.

Toda recta $y = \text{const.}$ que corta la frontera de R en dos puntos, lo hace en $x = 0$ y $x = y$ (P, Q en la figura), así que éstos son los límites para x cuando integremos primero con respecto a esta variable. Por lo tanto,

$$I = \int_0^a \int_0^y [x/\sqrt{(x^2+y^2)}]\, dx\, dy$$

$$= \int_0^a \left| \sqrt{(x^2+y^2)} \right|_{x=0}^{x=y} dy$$

$$= \int_0^a (\sqrt{2}y - y)\, dy = \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1)a^2. \qquad \square$$

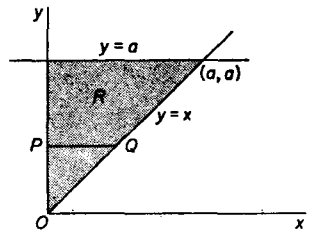

Figura 4.2

Problema 4.4 Cambiar el orden de integración en la integral repetida

$$I = \int_0^{2c} \int_{\sqrt{(2cy-y^2)}}^{\sqrt{(2cy)}} \text{sen } xy\, dx\, dy, \qquad (c > 0). \tag{4.6}$$

Solución. El límite inferior para x satisface la ecuación

$$x^2 + y^2 - 2cy = 0,$$

es decir,

$$x^2 + (y-c)^2 = c^2, \tag{4.7}$$

mientras que el superior satisface

$$x^2 = 2cy. \tag{4.8}$$

Por consiguiente, la región de integración R para la integral doble que corresponde a I está acotada a la izquierda por una parte de la circunferencia (4.7) y a la derecha por una parte de la parábola (4.8). Como $0 \leqslant x \leqslant 2c$, R es la región sombreada en la figura 4.3, y Q es el punto $(2c, 2c)$.

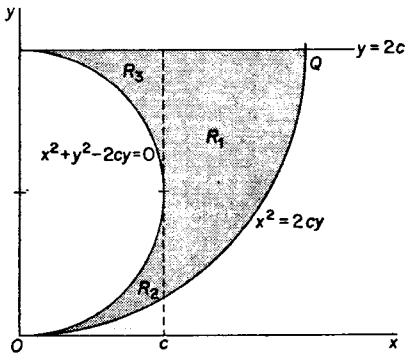

Figura 4.3

Como no todas las paralelas a Oy cortan la frontera de R en no más de dos puntos, debemos dividir R en tres partes R_1, R_2, R_3, como vemos en la figura, mediante un corte a lo largo de la recta $x = c$. Denotemos por I_1, I_2, I_3, respectivamente, las aportaciones a I de cada una de tales partes. En R_1 los límites para y son $x^2/2c$, $2c$, mientras que los de x son c, $2c$, de donde

$$I_1 = \int_c^{2c} \int_{x^2/2c}^{2c} \operatorname{sen} xy \, dy \, dx.$$

Al considerar de la misma manera las otras dos aportaciones, encontramos, puesto que $I = I_1 + I_2 + I_3$,

$$I = \int_c^{2c} \int_{x^2/2c}^{2c} \operatorname{sen} xy \, dy \, dx + \int_0^c \int_{x^2/2c}^{c-\sqrt{(c^2-x^2)}} \operatorname{sen} xy \, dy \, dx$$
$$+ \int_0^c \int_{c+\sqrt{(c^2-x^2)}}^{2c} \operatorname{sen} xy \, dy \, dx. \qquad \square$$

4.2 Transformaciones de las integrales dobles Mediante un cambio apropiado de variables (transformación)

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \tag{4.9}$$

podemos expresar una integral de la forma

$$I = \iint_R f(x, y)\, dx\, dy \tag{4.10}$$

como una integral doble sobre la región imagen S en el plano uv.

Supongamos que las funciones en (4.9) son continuas y tienen derivadas continuas de primer orden, y que el jacobiano

$$J = \partial(x, y)/\partial(u, v) \neq 0 \tag{4.11}$$

cuando (u, v) está en S. Entonces se pueden invertir las relaciones de (4.9), lo cual indica que puede identificarse un punto en la región R con igual propiedad, dando los valores de (u, v) como dando sus coordenadas (x, y). Llamaremos a (u, v) *coordenadas curvilíneas* en la región, debido a que las dos familias de líneas

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}, \tag{4.12}$$

son, en general, curvas.

Supongamos que se divide R en elementos de área por medio de una red de curvas $u = \text{const.}$, a espacios regulares Δu, y curvas $v = \text{const.}$, a espacios regulares Δv. Un elemento típico es aproximadamente un paralelogramo cuyos vértices A, B, C, D tienen coordenadas curvilíneas (u, v), $(u + \Delta u, v)$, $(u, v + \Delta v)$, $(u + \Delta u, v + \Delta v)$, respectivamente, y con área

$$AB \cdot AC \operatorname{sen} BAC = |\mathbf{AB} \wedge \mathbf{AC}| \tag{4.13}$$

en notación vectorial. Como v es constante a lo largo de AB, los incrementos en x y y entre estos dos vértices son aproximadamente

$$x_B - x_A = \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u, \qquad y_B - y_A = \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u,$$

lo cual nos da como componentes rectangulares de **AB**:

$$\mathbf{AB} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u, \quad \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\right).$$

Un resultado correspondiente para **AC** es

$$\mathbf{AC} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v, \quad \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\right),$$

y así, cuando formamos el producto vectorial de (4.13), obtenemos una expresión para el área del paralelogramo elemental:

$$\left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right| \Delta u\,\Delta v = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| \Delta u\,\Delta v, \qquad (4.14)$$

donde se han considerado despreciables los términos de grado superior al segundo en Δu y Δv.

Si aplicamos el proceso (4.1) de tomar el límite con esta subdivisión de R, obtenemos una integral doble equivalente a (4.10):

$$I = \iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \iint_S f[x(u, v), y(u, v)]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv, \qquad (4.15)$$

donde S es la imagen en el plano uv, de la región R. Observe el lector que lo que aparece en (4.15) es el valor absoluto del jacobiano (4.11).

En el caso particular de la transformación hacia las coordenadas polares en el plano (r, θ), dadas por $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, encontramos:

$$J = \partial(x, y)/\partial(r, \theta) = r.$$

De ahí que

$$I = \iint_S f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta, \qquad (4.16)$$

donde S es la región adecuada del plano $r\theta$. Si bien el jacobiano se anula en un punto, $x = 0$, $y = 0$, no se presenta dificultad alguna cuando R incluye este punto. Siempre podemos considerar I como el límite de una integral sobre una región modificada R_1, que for-

mamos al eliminar de R una vecindad del origen. En condiciones normales, esto vuelve a conducirnos a (4.16) sin cambio.

Problema 4.5 Evaluar

$$I = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{(a^2-y^2)}}^{\sqrt{(a^2-y^2)}} (x^2+y^2)^{3/2}\, dx\, dy,$$

mediante un cambio hacia coordenadas polares.

Solución. Como $-\sqrt{(a^2-y^2)} \leqslant x \leqslant \sqrt{(a^2-y^2)}$ equivale a $x^2 \leqslant a^2 - y^2$, la región de integración en el plano xy está limitada por la circunferencia de radio a y centro O. La región correspondiente del plano $r\theta$ es, por lo tanto, rectangular, y está dada por $0 \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. En consecuencia, por (4.16).

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^a r^3 \cdot r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^a r^4\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left| \tfrac{1}{5} r^5 \right|_0^a d\theta = \tfrac{1}{5} a^5 \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi a^5/5. \qquad \square$$

Problema 4.6 Encontrar el área de la región en el cuadrante positivo del plano xy limitada por las curvas

$$x^2+2y^2 = 1, \quad x^2+2y^2 = 4, \quad y = 2x, \quad y = 5x.$$

Solución. Ponemos

$$u = x^2+2y^2, \qquad v = y/x. \tag{4.17}$$

Entonces, la imagen en el plano uv de la región dada R es la región rectangular $S: 1 \leqslant u \leqslant 4$, $2 \leqslant v \leqslant 5$. Por (4.17),

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_x \\ u_y & u_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4y \\ -y/x^2 & 1/x \end{vmatrix} = 2+4y^2/x^2,$$

así que

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2+4y^2/x^2} = \frac{1}{2(1+2v^2)}.$$

Por lo tanto, para R tenemos:

$$\text{Area} = \iint_R 1\,dx\,dy = \iint_S \left|\partial(x,y)/\partial(u,v)\right| du\,dv$$

$$= \int_2^5 \int_1^4 \frac{du\,dv}{2(1+2v^2)} = \int_2^5 \left| \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1}\sqrt{2}v \right|_1^4 du$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{2}} (\tan^{-1}4\sqrt{2} - \tan^{-1}\sqrt{2}) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right). \quad \square$$

Problema 4.7 Evaluar la integral

$$I = \iint_R \sqrt{[-(x^2/a^2) - (y^2/b^2)]}\,dx\,dy, \quad a > 0,\ b > 0, \quad (4.18)$$

donde R es la región confinada por la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$.

Solución. La forma del integrando, y la naturaleza misma de la región, nos sugieren la sustitución

$$x/a = u \cos v, \qquad y/b = u \operatorname{sen} v. \qquad (4.19)$$

La región transformada es el rectángulo $0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$. El jacobiano de la transformación se determina fácilmente:

$$\partial(x,v)/\partial(u,v) = abu,$$

y de ahí, por (4.19), obtenemos

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{(1-u^2)} \cdot abu\,du\,dv$$

$$= ab \int_0^{2\pi} \left| -\tfrac{1}{3}(1-u^2)^{3/2} \right|_0^1 dv$$

$$= \tfrac{1}{3}ab \int_0^{2\pi} 1 \cdot dv = \tfrac{2}{3}\pi ab. \quad \square$$

Problema 4.8 Evaluar

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx, \tag{4.20}$$

expresando I^2 en la forma de una integral doble y transformando hacia coordenadas polares.

Solución. La integral es *impropia,* pues el intervalo de integración es infinito. Al operar, debemos tener presente que la notación en (4.20) se interpreta

$$I = \lim_{a\to\infty} I_a = \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-x^2}\,dx, \tag{4.21}$$

y suponer que exista tal límite. Como x actúa tan sólo como variable simbólica en (4.12), igual podemos poner

$$I_a = \int_0^a e^{-y^2}\,dy,$$

y, como el valor de I_a tan sólo depende de a, tenemos

$$I_a^2 = \int_0^a I_a e^{-y^2}\,dy = \int_0^a \left(\int_0^a e^{-x^2}\,dx\right) e^{-y^2}\,dy$$
$$= \int_0^a \left(\int_0^a e^{-x^2} e^{-y^2}\,dx\right) dy = \int_0^a \int_0^a e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

Por lo tanto, si denotamos por R_a la región cuadrada $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, obtendremos una expresión para I^2 en términos de una integral doble (en el límite):

$$I^2 = \lim_{a\to\infty} I_a^2 = \lim_{a\to\infty} \iint_{Ra} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

La transformación a coordenadas polares (r, θ), donde $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, conduce a reemplazar $dx\,dy$ por $r\,dr\,d\theta$ (ver 4.16), y, por lo tanto,

$$I_a^2 = \iint_{Sa} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta, \tag{4.22}$$

donde S_a es la imagen, en el plano $r\theta$, de R_a. Aquí se complicarán los límites, porque una región cuadrada no se presta para la introducción de coordenadas polares.

Pero observamos que R_a contiene la región consistente en un cuarto de círculo $C_a : x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, y como $e^{-(x^2+y^2)}$ es positivo, su integral doble sobre C es menor que I_a^2. Del mismo modo, I_a^2 es menor que la integral doble de $e^{-(x^2+y^2)}$ sobre $C_{\sqrt{2}a}$ (que contiene a R_a). Sin embargo, cuando a tiende hacia el infinito, las integrales dobles sobre C_a y $C_{\sqrt{2}a}$ deben tender al mismo límite, con lo cual vemos que el límite en cuestión debe ser I^2. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I^2 &= \lim_{a\to\infty} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^a e^{-r^2} r \, dr \, d\theta \\ &= \lim_{a\to\infty} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left| -\tfrac{1}{2} e^{-r^2} \right|_0^a d\theta \\ &= \lim_{a\to\infty} \tfrac{1}{4}\pi(1 - e^{-a^2}) = \tfrac{1}{4}\pi, \end{aligned}$$

de donde $I = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Este es uno de varios métodos para evaluar la importante integral (4.20) y tiene éxito debido a la introducción del factor r como el jacobiano de la transformación hacia coordenadas polares. □

4.3 Integrales triples Supongamos que $f(x, y, z)$ es una función definida en una región R cerrada y acotada en el espacio tridimensional, y supongamos que se divide R en n subregiones, de las cuales la i-ésima tiene volumen $\Delta V_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Si denotamos por f_i el valor de f en un punto arbitrario en la i-ésima subregión, entonces la *integral triple* de f sobre R es

$$I = \iiint_R f(x, y, z) \, dV = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i \, \Delta V_i, \tag{4.23}$$

siempre y cuando exista un límite definido en el segundo miembro cuando las dimensiones de todos los ΔV_i tienden a cero (sin tomar en cuenta la forma de subdividir). Esto sucede siempre que f es continua.

Podemos expresar la integral triple como una integral repetida, como se hizo con la doble.

Problema 4.9 Encontrar (i) la masa total, (ii) el momento de inercia alrededor de Ox de un cuerpo que ocupa el octante positivo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$, con densidad $\rho(x, y, z) = x^3yz$.

Solución. (i) La densidad ρ es la masa por unidad de volumen del cuerpo en la vecindad del punto (x, y, z), así que, si R denota la región ocupada por el cuerpo, su masa total será

$$M = \iiint_R \rho \, dV. \tag{4.24}$$

Como se indica en la figura 4.4, ejecutaremos primero la suma sobre los bloques que forman un prisma rectangular paralelo a Ox (con y y z como constantes). En el prisma se verifica la desigualdad $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{(1 - y^2 - z^2)}$. A continuación, sumamos sobre todos los prismas que forman una capa paralela al plano xy (con z constante). En esta capa, tenemos $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{(1 - z^2)}$. Por último, sumamos sobre todas esas capas, $0 \leqslant z \leqslant 1$. Este procedimiento conduce a expresar (4.24) como la integral repetida

$$M = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{(1-z^2)}} \int_0^{\sqrt{(1-y^2-z^2)}} x^3yz \, dx \, dy \, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{(1-z^2)}} \left| \tfrac{1}{4}x^4 \right|_0^{\sqrt{(1-y^2-z^2)}} yz \, dy \, dz$$

$$= \tfrac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{(1-z^2)}} (1-y^2-z^2)^2 yz \, dy \, dz$$

$$= \tfrac{1}{4} \int_0^1 \left| -\tfrac{1}{6}(1-y^2-z^2)^3 \right|_{y=0}^{\sqrt{(1-z^2)}} z \, dz$$

$$= \frac{1}{24} \int_0^1 (1-z^2)^3 z \, dz$$

$$= \frac{1}{24} \left| -\tfrac{1}{8}(1-z^2)^4 \right|_0^1 = \frac{1}{192}.$$

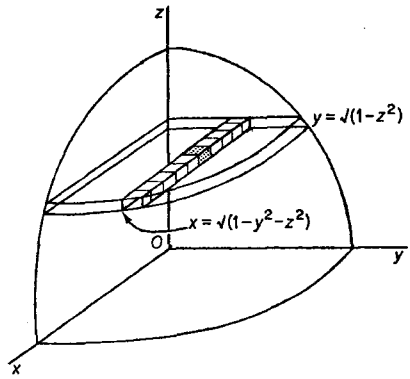

Figura 4.4

(ii) El momento de inercia alrededor de Ox es

$$I_x = \iiint_E (y^2+z^2)\,\rho\,dV$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{(1-z^2)}} \int_0^{\sqrt{(1-y^2-z^2)}} (y^2+z^2)\,x^3yz\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{(1-z^2)}} \left| \tfrac{1}{4}x^4 \right|_0^{\sqrt{(1-y^2-z^2)}} (y^2+z^2)\,yz\,dy\,dz$$

$$= \tfrac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{(1-z^2)}} (1-y^2-z^2)^2 (y^2+z^2)\,yz\,dy\,dz$$

$$= \tfrac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{(1-z^2)}} [(1-y^2-z^2)^2 - (1-y^2-z^2)^3]\,yz\,dy\,dz.$$

Podemos expresar esta integral repetida como la diferencia de dos integrales, en correspondencia con cada uno de los términos en el interior de los corchetes. La primera integral es la que ya evaluamos en (i). La segunda puede evaluarse de la misma manera, y encontramos que

$$\tfrac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{(1-z^2)}} (1-y^2-z^2)^3 yz\,dy\,dz = \tfrac{1}{320},$$

de donde

$$I_x = \tfrac{1}{192} - \tfrac{1}{320} = \tfrac{2}{5}.$$

□

4.4 Transformaciones de las integrales triples Si

$$I = \iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \tag{4.25}$$

y cambiamos las variables de acuerdo con la transformación

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w), \tag{4.26}$$

(4.25) se convierte en

$$I = \iiint_S F(u, v, w) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\, dv\, dw, \tag{4.27}$$

donde S es la imagen en el espacio uvw de la región R, y

$$F(u, v, w) = f[x(u, v, w),\ y(u, v, w),\ z(u, v, w)].$$

Suponemos aquí que las funciones (4.26) son continuas y tienen derivadas parciales continuas, y que el jacobiano $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ no cambia de signo dentro de la región de integración.

Las transformaciones a coordenadas polares tridimensionales revisten importancia.

Coordenadas polares cilíndricas (figura 4.5):

$$x = \rho \cos\phi, \quad y = \rho \operatorname{sen}\phi, \quad z = z, \tag{4.28}$$
$$J = \partial(x, y, z)/\partial(\rho, \phi, z) = \rho.$$

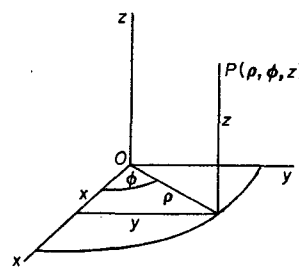

Figura 4.5

Coordenadas polares esféricas (figura 4.6):

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi, \quad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \quad z = r\cos\theta, \qquad (4.29)$$
$$J = \partial(x, y, z)/\partial(r, \theta, \phi) = r^2 \operatorname{sen}\theta.$$

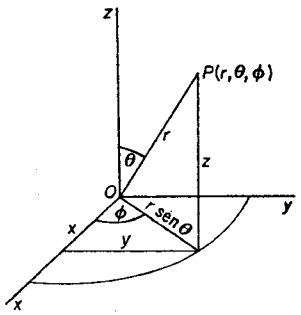

Figura 4.6

Problema 4.10 Evaluar

$$I = \iiint_R xyz(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx\, dy\, dz.$$

donde R es el octante positivo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$.

Solución. Mediante una transformación a coordenadas polares esféricas, obtenemos

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^a r^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos\theta \cos\phi \operatorname{sen}\phi \left| r^2 \operatorname{sen}\theta \right| dr\, d\theta\, d\phi$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left| \tfrac{1}{5} r^5 \right|_0^a \operatorname{sen}^3\theta \cos\theta \cos\phi \operatorname{sen}\phi\, d\theta\, d\phi$$
$$= \tfrac{1}{5}a^5 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left| \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}^4\theta \right|_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\phi \operatorname{sen}\phi\, d\phi$$
$$= \tfrac{1}{20}a^5 \left| \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\phi \right|_0^{\frac{1}{2}\pi} = a^5/40. \qquad \square$$

Problema 4.11 Encontrar el volumen de la región superior confinada por la superficie de revolución $4(x^2 + y^2) = z^4$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Solución. En términos de coordenadas polares cilíndricas, la ecuación $4(x^2 + y^2) = z^4$ se convierte en $2\rho = z^2$, lo cual demuestra que se trata de la superficie obtenida por rotación de la parábola $y = \frac{1}{2}z^2$, $x = 0$ (con eje Oy y vértice en el origen) alrededor de Oz.

La ecuación de la esfera en coordenadas polares cilíndricas es $\rho^2 = 3 - z^2$, y ambas superficies se intersecan en donde $3 - \rho^2 = 2\rho$. Como $\rho \geqslant 0$, las ecuaciones de las dos circunferencias horizontales de intersección son

$$\rho = 1, \qquad z = \pm\sqrt{2}.$$

En la región R que nos interesa, tenemos

$$\sqrt{(2\rho)} \leqslant z \leqslant \sqrt{(3-\rho^2)},$$

y el volumen de R es

$$\begin{aligned}
\iiint_R dx\,dy\,dz &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{(2\rho)}}^{\sqrt{(3-\rho^2)}} \rho\,dz\,d\phi\,d\rho \\
&= \int_0^1 \int_{2\pi}^0 \rho \Big| z \Big|_{\sqrt{(2\rho)}}^{\sqrt{(3-\rho^2)}} d\phi\,d\rho \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} [\rho(3-\rho^2)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2}\rho^{3/2}]\,d\phi\,d\rho \\
&= 2\pi \Big| -\frac{1}{3}(3-\rho^2)^{3/2} - \frac{2\sqrt{2}}{5}\rho^{5/2} \Big|_0^1 \\
&= 2\pi\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{3} - \frac{2\sqrt{2}}{5}\right) = \frac{2\pi}{15}(15\sqrt{3} - 16\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

□

Problema 4.12 Evaluar la integral

$$\iiint_R [1 - (x/a)^2 - (y/b)^2 - (z/c)^2]^{3/2}\,dx\,dy\,dz, \tag{4.30}$$

donde R es la región encerrada por el elipsoide $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$.

Solución. Vamos a emplear un tipo modificado de coordenadas polares, poniendo

$$x/a = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi, \quad y/b = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \quad z/c = r\cos\theta \quad (4.31)$$

La región R está dada en estas coordenadas por

$$0 \leqslant r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \phi < 2\pi,$$

y el jacobiano de la transformación (4.31) resulta, mediante cálculos directos,

$$\partial(x, y, z)/\partial(r, \theta, \phi) = abcr^2 \operatorname{sen}\theta.$$

Por lo tanto, la integral (4.30) se transforma en

$$\int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (1-r^2)^{3/2} abcr^2 \operatorname{sen}\theta \, d\phi \, d\theta \, dr$$

$$= 2\pi abc \int_0^1 \int_0^\pi (1-r^2)^{3/2} r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, dr$$

$$= 2\pi abc \int_0^1 (1-r^2)^{3/2} r^2 \Big| -\cos\theta \Big|_0^\pi dr$$

$$= 4\pi abc \int_0^1 (1-r^2)^{3/2} r^2 \, dr.$$

La sustitución $r = \operatorname{sen}\alpha$ reduce la última integral a una forma estándar elemental, de donde obtenemos el valor de la integral (4.30):

$$4\pi abc \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^4\alpha \operatorname{sen}^2\alpha \, d\alpha = \tfrac{1}{8}\pi^2 abc. \qquad \square$$

Problema 4.13 Evaluar la integral

$$I = \iiint_R (x+y+z)(x+y-z)(x-y-z)\, dx\, dy\, dz,$$

donde R es el tetraedro limitado por los planos $x + y + z = 0$, $x + y - z = 0$, $x - y - z = 0$, $2x - z = 1$.

Solución. La forma de la integral y las ecuaciones de tres de los planos que limitan R nos sugieren la transformación

$$u = x+y+z, \quad v = x+y-z, \quad w = x-y-z, \tag{4.32}$$

cuyo jacobiano es

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4,$$

así que $|\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)| = \frac{1}{4}$. La ecuación $2x - z = 1$ se convierte en

$$(u+w) - \tfrac{1}{2}(u-v) = 1,$$

es decir,

$$u+v+2w = 2,$$

de suerte que la región S en el plano uvw que es imagen de R bajo la transformación (4.32) es el tetraedro limitado por los planos

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad u+v+2w = 2.$$

El último de estos planos corta los ejes u, v y w en los puntos (2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 1), respectivamente, y por lo tanto S es el tetraedro que aparece en la figura 4.7.

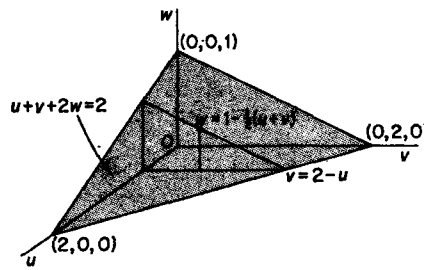

Figura 4.7

Para encontrar los nuevos límites de integración, consideremos un plano arbitrario u = const. que corte a S. A lo largo de cualquier recta v = const., interceptada por S, tenemos que $0 \leqslant w \leqslant 1$

$-\frac{1}{2}(u+v)$. Aquí, v debe satisfacer $0 \leqslant v \leqslant 2-u$, mientras que u, a su vez, $0 \leqslant u \leqslant 2$. Por lo tanto,

$$I = \int_0^2 \int_0^{2-u} \int_0^{1-\frac{1}{2}(u+v)} \tfrac{1}{4} uvw \, dw \, dv \, du.$$

Ahora la integración puede llevarse a cabo directamente, y conduce al valor

$$I = 1/180.$$

Por supuesto, se obtiene el mismo valor al ejecutar la integración en cualquier otro orden, si se introducen los límites adecuados. □

EJERCICIOS

1. Evaluar las integrales

$$\text{(i)} \int_0^2 \int_0^3 (2x+y)^2 \, dy \, dx. \qquad \text{(ii)} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_{\cos\theta}^1 r \cos\theta \, dr \, d\theta.$$

Bosquejar las regiones del plano xy sobre las cuales se toman las integrales dobles correspondientes, si $x = r \cos\theta$, $y = r$ sen θ, en (ii).

2. Evaluar $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2) \, dy \, dx$. Hacer un esquema de la región para la integral doble correspondiente y verificar la evaluación invirtiendo el orden de integración.

3. Aplicar la transformación $u = x - 2y$, $v = x + 2y$ a fin de evaluar

$$\int_0^1 \int_0^{2-2y} \exp[(x-2y)/(x+2y)] \, dx \, dy.$$

4. Evaluar

$$\iint_R x^3 y^3 \sqrt{(1 - x^4 - y^4)} \, dx \, dy.$$

donde R es la región $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x^4 + y^4 \leqslant 1$, por medio de la transformación $x^2 = u \cos v$, $y^2 = u$ sen v.

5. Encontrar el volumen de la región finita situada entre las superficies $z = 1 - x^2 - y^2$ y $z = 13 - 4(x^2 + y^2)$.

6. Demostrar que el centroide del octante positivo ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$) de la esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ está en el punto $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \frac{3}{8}a$. (El centroide $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de una región tridimensional R se define como

$$V\bar{x} = \iiint x \, dx \, dy \, dz,$$

con las formas correspondientes para $\bar{y}$, $\bar{z}$, donde V es el volumen y la integración se lleva a cabo sobre R.)

7. Evaluar

$$\int_0 \iiint x(x+y+z) \, dx \, dy \, dz,$$

donde R es la región limitada por los planos $x = 0$, $z = 0$, $y - z = 0$, $x + y + z = 1$.

CAPITULO 5

Integrales de línea y de superficie

5.1 Integrales de línea En este capítulo entenderemos por *curva* un conjunto uniparamétrico de puntos $P(x, y, z)$, definidos por relaciones de la forma

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \tag{5.1}$$

donde t toma todos los valores en algún intervalo $a \leqslant t \leqslant b$ y las funciones que aparecen en (5.1) son continuas. Una curva que se corta a sí misma lo hará en *puntos múltiples,* es decir, puntos (x, y, z) correspondientes a más de un valor de t. Si los puntos correspondientes a $t = a$ y $t = b$ coinciden, la curva es *cerrada.*

Una curva carente de puntos múltiples se llama *simple*; una curva cerrada sin puntos múltiples aparte de sus extremos que coinciden, se llama *curva simple cerrada.*

Cuando las funciones en (5.1) tienen derivadas, y tales derivadas no se anulan todas en el mismo punto, la curva posee una dirección tangencial que tiene la dirección del vector con estas derivadas como componentes:

$$[x'(t), y'(t), z'(t)]. \tag{5.2}$$

Si la dirección tangencial varía continuamente de uno a otro punto, es decir, si las componentes de (5.1) son continuas, se dice que la curva es *suave.*

Problema 5.1 Encontrar la longitud de la curva C:

$$x = 3\cos t, \quad y = 3\operatorname{sen} t, \quad z = t^2, \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Solución. Consideremos primero una curva suave general de la forma (5.1). Supongamos que nos aproximamos a ella mediante una línea poligonal de n segmentos que une los puntos con parámetros $t_0 = a,\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_{n-1},\ t_n = b$. El segmento $(t_k,\ t_{k+1})$ tiene la longitud

$$\Delta s_k = [(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2 + (\Delta z_k)^2]^{\frac{1}{2}}, \tag{5.3}$$

donde $\Delta x_k = x(t_{k+1}) - x(t_k)$, y Δy_k, Δz_k reciben las definiciones correspondientes. Por el teorema del valor medio, tenemos que

$$\Delta x_k = x'(\tau_k)\,(t_{k+1} - t_k),$$

donde τ_k está entre t_k y t_{k+1}, junto con dos expresiones similares para los incrementos de y y z. Si sustituimos en (5.3), sumamos sobre todos los segmentos y tomamos el límite cuando $t_{k+1} - t_k \to 0$ y $n \to \infty$, obtenemos la integral

$$\int_a^b [x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)]^{\frac{1}{2}}\, dt, \tag{5.4}$$

que se define como la longitud de la curva suave (5.1).

Para la curva en cuestión, C, tenemos:

$$x'(t) = -3 \operatorname{sen} t, \quad y'(t) = 3 \cos t, \quad z'(t) = 2t, \tag{5.5}$$

de donde, por (5.4), la longitud requerida es

$$\int_0^1 (9 + 4t^2)^{\frac{1}{2}}\, dt = \frac{1}{4}\left[2\sqrt{13} + 9 \ln\left(\frac{2 + \sqrt{13}}{3}\right)\right]. \qquad \square$$

Si denotamos por s la longitud de arco a lo largo de la curva, medida desde el extremo $t = a$, entonces

$$ds/dt = [x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)]^{\frac{1}{2}}, \tag{5.6}$$

y podemos escribir (5.4) en la forma

$$\int_C ds.$$

Si $f(x, y, z)$ está definida en todos los puntos sobre C y multiplicamos cada segmento poligonal por el valor de f en un punto arbitrario sobre el arco interceptado por el segmento, entonces el proceso de tomar el límite que conduce a (5.4) resulta en

$$\int_C f ds = \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)] \frac{ds}{dt} dt. \tag{5.7}$$

Problema 5.2 Evaluar la integral de línea

$$\int_C (y + xy^{-1} + 2yz)\, ds,$$

donde C es la curva $x = t^2$, $y = t$, $z = 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Solución. Se usa el término *integral de línea* para hacer énfasis en el hecho de que la integración se realiza a lo largo de una curva o línea especificada. Por (5.6) y las ecuaciones que definen C,

$$ds/dt = [(2t)^2 + (1) + (0)]^{\frac{1}{2}} = (4t^2+1)^{\frac{1}{2}}.$$

Por lo tanto, al expresar x, y y z, en el integrando, en términos de t, obtenemos para la integral que se busca

$$\int_0^1 (t + t + 2t)(4t^2+1)^{\frac{1}{2}}\, dt = 4\int_0^1 t(4t^2+1)^{\frac{1}{2}}\, dt = (5\sqrt{5}-1)/3. \qquad \square$$

La forma (5.7) no es la única forma de la integral de línea de una función $f(x, y, z)$ sobre una curva C. Supóngase que aproximamos C mediante una línea poligonal de n segmentos, siendo x_k, x_{k+1} las coordenadas x de las extremos de un segmento representativo; y sea f_k el valor de f en un punto arbitrario del arco de C interceptado por este segmento. Si la suma sobre todos estos segmentos

$$\sum_k f_k(x_{k+1} - x_k)$$

tiende a un límite definido cuando $x_{k+1} - x_k \to 0$ y $n \to \infty$, se denota tal límite por

$$\int_C f(x, y, z)\, dx.$$

Las integrales de línea con respecto a y y z se definen de la misma manera.

Problema 5.3 Evaluar

$$\int_C (x^2y^2 + xy - yz)\, dx, \tag{5.8}$$

donde C es el arco semicircular de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, para el cual $y \geqslant 0$ y x crece desde -1 hasta 1.

Solución. El tercer término del integrando se anula sobre C, pues $z = 0$. En los otros dos términos, ponemos $y = \sqrt{(1 - x^2)}$, con lo cual obtenemos para (5.8),

$$\int_{-1}^{1} [x^2(1-x^2) + x\sqrt{(1-x^2)}]\, dx = \left| \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{6}x^5 - \tfrac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} \right|_{-1}^{1}$$

$$= \tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{5} = \tfrac{4}{15}.$$

Obsérve el lector que si se lleva a cabo la integración a lo largo de la misma curva pero en sentido opuesto, habría que intercambiar los límites de la última integral, y el valor sería $-\frac{4}{15}$.

Otro procedimiento consiste en expresar la ecuación de C en la forma paramétrica $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = 0$, donde t crece desde $-\pi$ hasta 0. Entonces $dx = -\operatorname{sen} t\, dt$ y (5.8) queda como

$$\int_{-\pi}^{0} (\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t + \cos t \operatorname{sen} t)\, (-\operatorname{sen} t\, dt),$$

que, al integrarse, vuelve a producir el valor 4/15. □

Problema 5.4 Evaluar la integral

$$I = \int_C [(2xy - z)\, dx + yz\, dy + x\, dz], \tag{5.9}$$

donde (i) C es la curva $x = t$, $y = 2t$, $z = t^2 - 1$, con t creciendo desde 0 hasta 1, (ii) C consta de dos segmentos rectilíneos, desde el origen hasta el punto $(1, 0, -1)$ y desde $(1, 0, -1)$ hasta el punto $(2, 3, -3)$.

Solución. La notación en (5.9) denota la suma de tres integrales de línea separadas, que deben integrarse respectivamente con respecto a x, y y z.

(i) Ponemos x, y y z en términos de t en el integrando, mediante las ecuaciones que definen C. Como se tiene que

$$dx = dt, \quad dy = 2dt, \quad dz = 2tdt,$$

(5.9) se convierte en

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \{[4t^2 - (t^2-1)]\,dt + 2t(t^2-1)\,(2\,dt) + t(2t\,dt)\} \\ &= \int_0^1 (4t^3 + 5t^2 - 4t + 1)\,dt \\ &= \left| t^4 + \tfrac{5}{3}t^3 - 2t^2 + t \right|_0^1 = \tfrac{5}{3}. \end{aligned}$$

(ii) Denotemos por C_1, C_2 los segmentos rectilíneos desde O hasta $(1, 0, -1)$ y desde $(1, 0, -1)$ hasta $(2, 3, -3)$. A lo largo de C_1 tenemos $y = 0$ y $z = -x$, de modo que $dy = 0$, $dz = -dx$. Por lo tanto, la aportación a I a lo largo de C_1 es

$$I_{C_1} = \int_{C_1} (-z\,dx + x\,dz) = \int_0^1 (x\,dx - x\,dx) = 0.$$

Para C_2, observamos que la forma estándar para las ecuaciones cartesianas de la recta que une los puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) es

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Por consiguiente, la recta sobre la cual se encuentra C_2 tiene las ecuaciones

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-0}{3-0}=\frac{z-(-1)}{-3-(-1)},$$

lo cual resulta en

$$y=3(x-1),\quad z=1-2x, \tag{5.10}$$

y, tomando diferenciales,

$$dy=3\,dx,\qquad dz=-2\,dx. \tag{5.11}$$

Al hacer sustituciones en (5.9) con la información de (5.10), (5.11), con C_2 en lugar de C, encontramos la aportación a I de C_2:

$$I_{C_2}=\int_1^2(-12x^2+21x-10)\,dx,$$

después de hacer algunas reducciones. Esto conduce a

$$I_{C_2}=\left|-4x^3+\tfrac{21}{2}x^2-10x\right|_1^2=-\tfrac{13}{2}.$$

Luego

$$I=I_{C_1}+I_{C_2}=0-\tfrac{13}{2}=-\tfrac{13}{2}. \qquad \square$$

Las integrales de línea de la forma

$$\int_C[P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz] \tag{5.12}$$

tienen gran importancia en aplicaciones físicas y suelen expresarse en notación vectorial. Denotemos por $\mathbf{F}$ el vector cuya forma en componentes rectangulares es

$$\mathbf{F}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k},$$

donde $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ denotan los vectores unitarios a lo largo de Ox, Oy, Oz, respectivamente. Entonces, se asocia un valor particular de $\mathbf{F}$ con cada punto (x, y, z). ($\mathbf{F}$ se llama *función* vectorial *de punto* o de *campo*.) En particular, $\mathbf{F}$ tiene un valor en cada punto de C.

Sobre C, los valores de x, y y z pueden expresarse como funciones de la longitud de arco s a lo largo de la curva, medida desde el punto inicial. El vector

$$\mathbf{t} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k} \tag{5.13}$$

está en la dirección del vector tangente, y apunta en el sentido en que crece s. Además, como $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, la magnitud de $\mathbf{t}$ es 1, es decir (5.13) es el *vector unitario tangente* a C. Si introducimos la diferencial del vector de posición,

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k},$$

vemos que podemos escribir (5.12) en cualquiera de las formas del producto escalar:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \quad \text{ó} \quad \int_C (\mathbf{F}\cdot\mathbf{t})\, ds. \tag{5.14}$$

Por ejemplo, si $\mathbf{F}$ es la fuerza que actúa sobre una partícula P cuando está situada en el punto (x, y, z), entonces el *trabajo realizado* por $\mathbf{F}$ cuando P se mueve a lo largo de la curva C es la integral de la componente tangencial de $\mathbf{F}$ con respecto a la distancia de arco medida a lo largo de C, y está dado por (5.14).

Problema 5.5 Si $\mathbf{F} = (y - 2z)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + (2xz + y)\mathbf{k}$, evaluar $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de la curva C del problema 5.4(i).

Solución. Debemos evaluar

$$\int_C [(y-2z)\, dx + xy\, dy + (2xz+y)\, dz],$$

donde C está definida por $x = t$, $y = 2t$, $z = t^2 - 1$, y t crece desde 0 hasta 1. Las últimas ecuaciones resultan en:

$$dx = dt, \quad dy = 2\, dt, \quad dz = 2t\, dt,$$

así que, una vez efectuada la sustitución, la integral que buscamos queda como

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 2(2t^4+t^2+t+1)\,dt = \frac{67}{15}. \qquad \square$$

5.2 El teorema de Green en el plano En una forma de este teorema se afirma que si R es una región del plano xy limitada por una curva simple cerrada C, y si $P(x, y)$, $Q(x, y)$ son continuas y tienen derivadas parciales de primer orden que también son continuas en R y sobre C, entonces

$$\int_C (P\,dx+Q\,dy) = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy, \tag{5.15}$$

donde se describe C en el sentido positivo (es decir, en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj cuando se mira el plano desde el lado del eje positivo z, con lo cual R queda siempre del lado izquierdo al efectuar el recorrido).

Cuando R tiene la propiedad de que C se interseca en no más de dos puntos con toda recta paralela a uno de los ejes de coordenadas, la demostración resulta elemental. Pues podemos considerar C como si consistiera de una curva "inferior" $y = y_1(x)$ y otra "superior" $y = y_2(x)$, donde $y_2 > y_1$ y x varía sobre un intervalo $a \leqslant x \leqslant b$. Como el sentido de descripción de C es positivo, x crecerá desde a hasta b a lo largo de la curva inferior, y decrecerá desde b hasta a a lo largo de la superior. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\int_C P\,dx &= \int_a^b P[x, y_1(x)]\,dx + \int_b^a P[x, y_2(x)]\,dx \\ &= -\int_a^b [P(x, y_2) - P(x, y_1)]\,dx \\ &= -\int_a^b \left(\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right) dx = -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Si intercambiamos los papeles de x y y, podemos ver a C como compuesta por una curva "izquierda" $x = x_1(y)$ y otra "derecha" $x = x_2(y)$, con $x_1 < x_2$, y demostrar que

$$\int_C Q\,dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy. \tag{5.17}$$

Al sumar (5.16) y (5.17) obtenemos el resultado que se busca.

El teorema es válido incluso cuando R no satisface la condición indicada en la demostración anterior. La extensión para regiones *simplemente conexas* más generales del plano requiere de un análisis más detenido, donde interviene la subdivisión. (Una región simplemente conexa R, de una superficie o en el espacio tridimensional, es aquella en la cual toda curva cerrada puede encogerse en forma continua hasta reducirse a un punto, sin salirse de R. Por ejemplo, en el plano, un disco es simplemente conexo, pero un anillo no lo es; en el espacio tridimensional, la esfera sólida es simplemente conexa, pero el toro no lo es.)

Problema 5.6 Extender el teorema de Green al caso en que R es el anillo $b^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant a^2$, sobre la base de la validez supuesta del teorema para cualquier región simplemente conexa del plano.

Solución. Denotemos por C_1 y C_2 las circunferencias mayor y menor, respectivamente, que juntas limitan R (figura 5.1). Inter-

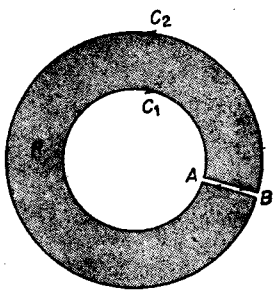

Figura 5.1

pretaremos, en cada caso, el sentido positivo de descripción de las partes C_1 y C_2 de la frontera como aquel en el cual R queda siempre hacia la izquierda.

Vamos a introducir un "corte transversal" AB desde C_1 hasta C_2, a fin de formar la curva cerrada C_1, AB, C_2, BA, que encierra una región simplemente conexa. Si aplicamos (5.15) a esta región, vemos

que, al cancelarse las aportaciones de AB y BA a la integral de línea,

$$\int_C (P\,dx+Q\,dy) = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

donde C denota la suma de las curvas C_1 y C_2, descrita cada una de ellas en el sentido positivo.

Por supuesto, se puede aplicar el mismo procedimiento a casos más generales. □

Problema 5.7 Demostrar que la integral de línea

$$\int_C [x(x^2+y^2)\,dx + (2x+x^2y+y^3)\,dy],$$

donde C es una curva simple cerrada en el plano xy, es proporcional al área de la región R encerrada por C.

Solución. Ponemos $P = x(x^2 + y^2)$, $Q = 2x+x^2y+y^3$. Entonces,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (2+2xy) - 2xy = 2.$$

Por consiguiente, según el teorema de Green, la integral dada es

$$\int_C (P\,dx+Q\,dy) = \iint_R 2\,dx\,dy = 2A,$$

donde A es el área de R. De esto se deduce la validez del resultado. □

Problema 5.8 Si $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ satisfacen las condiciones del teorema de Green (5.15), demostrar que una condición suficiente para que la integral de línea

$$\int_A^B (P\,dx+Q\,dy) \tag{5.18}$$

sea independiente de la curva que une A y B (bajo el supuesto de que la curva y los puntos dados A y B están en R) es que

$$\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y, \tag{5.19}$$

en todos los puntos de R.

Solución. Sean C_1 y C_2 dos curvas cualesquiera que no se cortan, ambas desde A hasta B y totalmente contenidas en R. La curva cerrada que va de A a B y vuelve a A, compuesta por C_1 y $-C_2$ (es decir, C_2 recorrida en sentido inverso) encierra una región dentro de la cual sabemos que se verifica (5.19). De ahí que, aplicando el teorema de Green,

$$\int_{C_1} (P\,dx+Q\,dy) - \int_{C_2} (P\,dx+Q\,dy) = 0.$$

Esto es, la integral de línea (5.18) tomada a lo largo de C_1 tiene el mismo valor que la integral de línea tomada a lo largo de C_2. Esto demuestra el resultado en el caso de curvas que no se cortan. Si las curvas se intersecan, basta con dividirlas en los puntos de intersección y aplicar la argumentación anterior a las diversas secciones.

Puede demostrarse que la condición enunciada en (5.19) es también *necesaria* para que (5.18) sea independiente de la trayectoria que une A y B. □

5.3 Integrales de superficie Una superficie en el espacio tridimensional es un lugar geométrico de puntos con dos parámetros, definido por una ecuación de la forma

$$z = f(x, y); \tag{5.20}$$

o

$$F(x, y, z) = 0; \tag{5.21}$$

o por un conjunto de ecuaciones

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v). \tag{5.22}$$

Vamos a suponer que las funciones que aparecen aquí son continuas y poseen derivadas parciales continuas en las regiones de definición.

Una superficie *cerrada* es aquella que tiene una extensión limitada pero carece de curva frontera; ejemplos de ellas son la esfera, el elipsoide y el toro. Algunas superficies, como la cinta de Möbius (que puede formarse uniendo los dos extremos de una tira de papel después de torcerla una vez), tienen una sola cara y se dice que son *no orientables*. Las superficies más familiares, como la de la esfera y el toro tienen dos caras, es decir, son *orientables*. Nosotros tan sólo estudiaremos superficies de la segunda especie.

En correspondencia con (5.22), sean

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}. \tag{5.23}$$

Si $C \neq 0$, podemos resolver el primer par de (5.22) para u y v, a fin de efectuar una sustitución en la tercera y llegar a la forma (5.20). Se aplican resultados parecidos si $A \neq 0$ ó $B \neq 0$. Conviene suponer que las superficies consideradas pueden dividirse en un número finito de partes, en cada una de las cuales se satisfagan ecuaciones como las (5.22) con A, B y C no todas cero.

La *integral de superficie* de $\phi(x, y, z)$ sobre una superficie S se define de la manera siguiente. Dividamos arbitrariamente S en n elementos con áreas respectivas $\Delta S_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Denotaremos por ϕ_i el valor de ϕ en cualquiera de los puntos del elemento i-ésimo. Si

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i \, \Delta S_i$$

tiende hacia un límite definido cuando todas las dimensiones de los ΔS_i tienden a cero y n tiende hacia el infinito, entonces el límite de esta suma es la integral de superficie de ϕ sobre S y se expresa como

$$\iint_S \phi(x, y, z) \, dS. \tag{5.24}$$

Este valor existe siempre que ϕ es continua.

Por ejemplo, cuando $\phi \equiv 1$, (5.24) representa el área de S. Asimismo, cuando ϕ es la densidad de área de una película material que forme la superficie S, entonces (5.24) es la masa total de dicha película.

Problema 5.9 Demostrar que el área de la superficie S, cuya ecuación es $z = f(x, y)$, puede expresarse como

$$\iint_S dS = \iint_R \sqrt{(1+f_x^2+f_y^2)}\, dx\, dy \tag{5.25}$$

donde R es la proyección de S sobre el plano xy (es decir, la región en la cual f está definida).

Solución. Dividamos S en elementos cuyas proyecciones sobre el plano xy sean rectángulos de lados Δx paralelos a Ox y Δy paralelos a Oy. Si ΔS_i es el área de uno de estos elementos, ubicado en el lugar donde la normal a S trazada hacia arriba tiene los cosenos directores (l, m, n), entonces, mediante la proyección,

$$n\,\Delta S_i = \Delta x\,\Delta y, \tag{5.26}$$

dado que n es el coseno del ángulo que forman la normal a S y Oz. Al expresar la ecuación de S en la forma

$$F(x, y, z) \equiv z - f(x, y) = 0,$$

entonces, como los cosenos directores en cuestión son proporcionales a (F_x, F_y, F_z), vemos que también son proporcionales a $(-f_x, -f_y, 1)$. (Véase, por ejemplo, la obra del L. Marder: *Algebra vectorial* (capítulo 5), publicada en esta misma serie.) Pero los cosenos directores cumplen la condición $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, así que debe verificarse que

$$(l, m, n) = (-f_x, -f_y, 1) / \sqrt{(1+f_x^2+f_y^2)}.$$

Al sustituir en (5.26) el valor de n dado en esta ecuación, obtenemos

$$\Delta S_i = \sqrt{(1+f_x^2+f_y^2)}\,\Delta x\,\Delta y.$$

Sumando sobre todas las i y tomando el límite cuando $\Delta S_i \to 0$, se obtiene el resultado que se busca. □

Problema 5.10 Encontrar el área de la superficie S compuesta por la porción de la superficie $2x^2 + 3y^2 + z = 1$ contenida en el interior del cilindro elíptico $4x^2 + 9y^2 = 1$.

Solución. Observamos que nuestro cilindro elíptico está formado por la familia de rectas paralelas a Oz que pasan por la elipse $4x^2 + 9y^2 = 1$, $z = 0$ en el plano xy. En consecuencia, buscamos el área de la superficie

$$z = f(x, y) = 1 - 2x^2 - 3y^2$$

para la cual (x, y) está en la región R del plano xy, definida por $4x^2 + 9y^2 \leqslant 1$. Por (5.25), el área en cuestión es

$$\iint_R \sqrt{(1 + f_x^2 + f_y^2)}\, dx\, dy = \iint_R \sqrt{(1 + 16x^2 + 36y^2)}\, dx\, dy.$$

A fin de evaluar la integral, realicemos una transformación a coordenadas polares modificadas, poniendo

$$4x = r\cos\theta, \quad 6y = r\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{5.27}$$

La imagen de R en el plano $r\theta$ es la región $0 \leqslant r \leqslant 2$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, y el jacobiano de la transformación (5.27) resulta ser, mediante cálculos fáciles,

$$\partial(x, y)/\partial(r, \theta) = r/24.$$

Por lo tanto, el área es

$$\frac{1}{24}\int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{(1 + r^2)}\, r\, dr\, d\theta = \frac{1}{24}\int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{3}(1 + r^2)^{3/2} \right|_0^2 d\theta = \frac{\pi}{36}(5\sqrt{5} - 1). \qquad \square$$

Problema 5.11 Evaluar la integral de superficie de $\phi(x, y, z) = 6x^2 + 3y^2 + z$ sobre la superficie S del problema 5.10.

Solución. Es preciso evaluar

$$\iint_S \phi(x, y, z)\, dS = \iint_R \phi[x, y, f(x, y)]\sqrt{(1 + 16x^2 + 36y^2)}\, dx\, dy, \tag{5.28}$$

(usando los resultados y la notación del problema 5.10). Ahora bien,

$$\phi(x, y, f) = 6x^2+3y^2+(1-2x^2-3y^2)$$
$$= 4x^2+1 = \tfrac{1}{4}r^2\cos^2\theta+1,$$

en términos de las coordenadas polares modificadas (5.27). Por lo tanto, (5.28) se convierte en

$$\frac{1}{24}\int_0^{2\pi}\int_0^2 (\tfrac{1}{4}r^2\cos^2\theta+1)\sqrt{(1+r^2)}\,r\,dr\,d\theta.$$

A fin de simplificar la integración respecto a r, haremos la sustitución $r = \sqrt{(t^2-1)}$. Entonces, la última integral se convierte en

$$\frac{1}{24}\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{5}} [\tfrac{1}{4}(t^2-1)\cos^2\theta+1]t^2\,dt\,d\theta$$
$$= \frac{\pi}{24}\int_1^{\sqrt{5}} [\tfrac{1}{4}(t^2-1)+2]t^2\,dt$$
$$= \frac{\pi}{24}\left|\frac{1}{20}t^5+\frac{7}{12}t^3\right|_1^{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{720}(125\sqrt{5}-19). \qquad \square$$

Cuando se expresa la ecuación de una superficie S en la forma $F(x, y, z) = 0$, los cosenos directores (l, m, n) de la normal trazada hacia arriba son proporcionales a (F_x, F_y, F_z), y como $n > 0$, tenemos:

$$n = |F_z|/\sqrt{(F_x^2+F_y^2+F_z^2)},$$

así que calculamos la integral de superficie de $\phi(x, y, z)$ sobre S a partir de

$$\iint_S \phi\,dS = \iint_R \phi\,\frac{\sqrt{(F_x^2+F_y^2+F_z^2)}}{|F_z|}\,dx\,dy, \qquad (5.29)$$

si bien aún necesitamos resolver $F = 0$ para z, ya que debemos expresar el integrando como función de x y y.

En el problema siguiente estudiaremos el caso en que se expresa la superficie en forma paramétrica.

Problema 5.12 Demostrar que el área de la superficie S:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \tag{5.30}$$

está dada por

$$\iint_S dS = \iint_\Sigma \sqrt{(A^2+B^2+C^2)}\, du\, dv, \tag{5.31}$$

donde A, B, C son los jacobianos de (5.23) y Σ es la imagen de S en el plano uv.

Obtener una expresión correspondiente para la integral de superficie de $g(x, y, z)$ sobre S.

Solución. Como se afirmó en la pág. 108, supondremos que A, B y C no son cero, así que (5.30) equivale a una sola ecuación, $F(x, y, z) = 0$, que se satisface en forma idéntica cuando se reemplazan x, y, y z por (5.30); al efectuar una derivación parcial con respecto a u (con v constante),

$$F_x x_u + F_y y_u + F_z z_u = 0.$$

La derivación con respecto a v (con u constante) produce una segunda ecuación, semejante a la anterior, pero con v en lugar de u. Cuando eliminamos F_x, F_y y F_z de estas dos ecuaciones, obtenemos

$$F_x/A = F_y/B = F_z/C.$$

Por (5.29), poniendo $\phi \equiv 1$, vemos que el área de S es

$$\iint_S dS = \iint_R \frac{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}{|C|}\, dx\, dy, \tag{5.32}$$

(después de sustituir $F_x/F_z = A/C$, etc.).

Si transformamos la última integral por medio del primer par de ecuaciones (5.30), podemos reemplazar $dxdy$ por $|C|\, du\, dv$, pues C es el jacobiano de la transformación. La región de integración en el plano uv es la imagen de R bajo la transformación, y es, por lo tanto, Σ, de donde se desprende la validez de (5.31).

Sea $G(u, v)$ la función obtenida al sustituir (5.30) en $g(x, y, z)$. Entonces, (5.31) conservará su validez si introducimos el factor g en el integrando del primer miembro y G en el del segundo, con lo cual nos queda

$$\iint_S g\, dS = \iint_\Sigma G(u, v) \sqrt{(A^2+B^2+C^2)}\, du\, dv. \qquad \square \quad (5.33)$$

Problema 5.13 Encontrar (i) la masa, (ii) el centroide, (iii) el momento de inercia alrededor de Oz de una delgada lámina material de densidad uniforme k que forma la superficie S:

$$x = u \cos v, \quad y = \tfrac{1}{2}u^2, \quad z = u \operatorname{sen} v, \qquad (5.34)$$

donde $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant \pi$.

Solución. Observe el lector que al eliminar u y v de (5.34) obtenemos $x^2 + z^2 = 2y$, lo cual representa un paraboloide de revolución formado por la rotación de la parábola $x^2 = 2y$ alrededor de Oy. Por inspección de los límites para u y v, vemos que S consta de la parte de esta superficie para la cual $z \geqslant 0$ y $0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$ (figura 5.2).

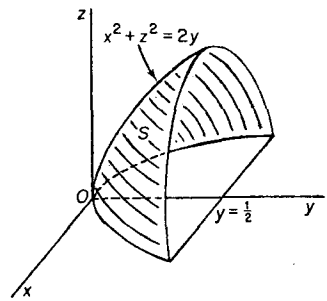

Figura 5.2

Por (5.34),

$$A = \frac{\partial(y, v)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} u & 0 \\ \operatorname{sen} v & u \cos v \end{vmatrix} = u^2 \cos v.$$

De la misma manera, encontramos que

$$B = -u, \qquad C = u^2 \operatorname{sen} v,$$

de donde

$$\sqrt{(A^2+B^2+C^2)} = u\sqrt{(u^2+1)}.$$

(i) La masa es

$$M = \iint_S k\, dS = k\int_0^{\pi}\int_0^1 u\sqrt{(u^2+1)}\, du\, dv$$

$$= k\int_0^{\pi} \left| \tfrac{1}{3}(u^2+1)^{3/2} \right|_0^1 dv$$

$$= \tfrac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)k\pi.$$

(ii) Sea el centroide el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Por simetría, $\bar{x} = 0$. Como sobre S se verifica la relación $y = \frac{1}{2}u^2$, deducimos que

$$M\bar{y} = \iint_S yk\, dS = k\int_0^{\pi}\int_0^1 \tfrac{1}{2}u^3\sqrt{(u^2+1)}\, du\, dv = (\sqrt{2}+1)k\pi/15,$$

donde hemos empleado la sustitución $u = \sqrt{(t^2-1)}$ a fin de ejecutar la primera integración. Por lo tanto, por el resultado (i),

$$\bar{y} = (5+3\sqrt{2})/35.$$

De la misma manera,

$$M\bar{z} = \iint_S zk\, dS = k\int_0^{\pi}\int_0^1 u^2\sqrt{(u^2+1)}\operatorname{sen} v\, du\, dv$$

$$= k[3\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})]/4,$$

donde la sustitución $u = \operatorname{senh}\theta$ ha servido para efectuar la primera integración. Entonces, podemos determinar $\bar{z}$ al dividir entre (i).

(iii) El momento de inercia alrededor de Oz es

$$I_z = \iint_S (x^2+y^2)k\, dS = k\int_0^{\pi}\int_0^1 (\cos^2 v + \tfrac{1}{4}u^2)u^3\sqrt{(u^2+1)}\, du\, dv$$

$$= k\pi\int_0^1 (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}u^2)u^3\sqrt{(u^2+1)}\, du,$$

(donde integramos primero respecto a v). Esto nos conduce a

$$I_z = (5\sqrt{2}+2)k\pi/42. \qquad \square$$

EJERCICIOS

1. Si $\phi(x, y, z) = 2z - x^2 - y^2$, evaluar $\int \phi \, ds$ sobre la curva $x = t \cos t$, $y = t \operatorname{sen} t$, $z = t^2$, donde t crece desde 0 hasta 1.

2. Evaluar

$$\int_C \frac{x^2 y}{x^2+y^2}\, dx,$$

donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ del plano xy, descrita en el sentido positivo.

3. Evaluar

$$\int_C [xy\, dx + (z-x)\, dy + 2yz\, dz],$$

donde C está formada por los tres segmentos rectilíneos que van desde el origen hasta el punto $A(1, 0, 0)$, desde A hasta $B(1, 2, 0)$, y desde B hasta $(1, 2, -2)$.

4. Aplicar el teorema de Green para evaluar

$$\int_C [(x+1)ye^x\, dx + x(e^x+1)\, dy],$$

donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ descrita en sentido positivo.

5. Encontrar el área de la superficie de la porción del hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geqslant 0$, cuya proyección sobre el plano xy está limitada por la curva $r = 2\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$ (en coordenadas polares del plano) y una parte del eje y.

6. Evaluar

$$\iint_S^b xy\, dS,$$

donde S es la superficie $x = u \cosh v$, $y = u \operatorname{senh} v$, $z = \frac{1}{2}(1 - u^2)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$.

Respuestas a los ejercicios

Capítulo 1

1. $\cos y+y^2\cos xy$, $\quad -x\,\text{sen}\,y+\text{sen}\,xy+xy\cos xy$, $\quad -y^3\,\text{sen}\,xy$, $-\pi^3/8$, $\quad -(1+\frac{1}{4}\pi^2)$.
2. $f_{xy}(0,0)=1$, $\quad f_{yx}(0,0)=-1$.
3. $k\cos k$, $\quad -(k+e^{-2})\cos k-k^2\,\text{sen}\,k$, $\quad$ donde $k=(1+e)/e^2$.
4. $x(x^2+y^2)^{-1}$, $\quad y(x^2+y^2)^{-1}$, $\quad -y(x^2+y^2)^{-1}$, $\quad x(x^2+y^2)^{-1}$.
5. $z=(1+x)(e^y-1)$.
7. $xy(e^{x+y}-x)$.
8. $0{\cdot}42$.

Capítulo 2

1. $(yz-2x)/(y+2zu)$, $\quad (xz-u)/(y+2zu)$, $\quad (xy-u^2)/(y+2zu)$.
2. $u[(1-3v^2y)u^2+y][(3u^2x-1)(3v^2y-1)-xy]^{-1}$.
   $u[(3u^2x-1)-xu^2][(3u^2x-1)(3v^2y-1)-xy]^{-1}$.
3. $w=u^2-2v$.
4. Dos; por ejemplo $v=-tw$, $\quad u=t+2w$.
5. $(1+4xy)^{-1}$.
6. $[2x(z-y-x)]^{-1}$, $\quad$ donde $x\neq 0$, $\quad z-y-x\neq 0$.

7. S es la porción del anillo $a \leqslant \sqrt{(u^2 + v^2)} \leqslant b$ para la cual $u \leqslant 0$, $v \geqslant 0$. $\partial(u, v)/\partial(x, y) = e^{2x}$. Los sentidos son todos iguales.

Capítulo 3

1. $-10-[8(x-1)-13(y+2)]+[(x-1)^2+13(x-1)(y+2)-6(y+2)^2]-[6(x-1)(y+2)^2-(y+2)^3]+(x-1)(y+2)^3$.
2. $1+\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{3}{8}(x^4+2x^2y^2+y^4)+\cdots$
3. Punto silla en $(0, 0)$, mín. en $(-1, 1)$, mín. en $(1, -1)$.
4. Mín. en $(0, 0, -1)$.
5. El menor es c, el mayor $[a^4 + b^4 + c^4]^{\frac{1}{4}}$.
6. $x = t = \frac{67}{69}$, $y = \frac{2}{23}$, $z = \frac{14}{69}$.
7. $4(y+z)^2+x(4y-4z-x) = 0$.
8. $x(x^2+y^2+z^2)+2y^2 = 0$.
9. $xyz = 1$.

Capítulo 4

1. (i) 86, (ii) $\frac{1}{6}$.
2. $\frac{3}{35}$.
3. senh 1.
4. $\frac{1}{60}$.
5. 24π.
7. $\frac{1}{60}$.

Capítulo 5

1. $\dfrac{11\sqrt{6}}{40} - \dfrac{\sqrt{5}}{200} \ln(\sqrt{5}+\sqrt{6})$.
2. $-\pi/4$.
3. 6.
4. πa^2.
5. $8[\pi - 2\,\text{sen}^{-1}(\pi/4)] - \pi\sqrt{((16-\pi^2)}$.
6. $[2\sqrt{2}(\cosh^5 1 - \cosh 2) + \text{senh}^2 1]/15 \cosh 2$.

Indice alfabético

"C"

Campo vectorial, 103
Centroide, 95, 113
Coordenadas curvilíneas, 81
Conjunto, 7
  abierto, 7
  cerrado, 7
Criterio *D* para puntos extremos, 62
  generalizado, 65
Curva, 97
Curva simple, 97
Curva simple cerrada, 97
Curva suave, 97

"D"

Dependencia funcional, 38-42
  y rango, 41
Derivada parcial, 10
  de segundo orden, 14
  interpretación geométrica, 11
  regla de la cadena, 15-17
Diferencial, 25
  aplicada a aproximaciones, 29-30
  interpretación geométrica, 28-29
Dominio de definición, 8

"E"

Ecuación de Laplace, 17-19
Ecuación de onda, 21
  esférica, 23
Envolvente de curvas, 70
  de superficie, 72-73
Extremo, 58
  absoluto, 58
  relativo, 58
Extremo relativo, 58
  condiciones suficientes, 61

"F"

Forma de Cauchy del residuo, 53
Forma de Lagrange del residuo, 53
Función, 8
  de valor único, 8
  de valores múltiples, 8
  implícita, 33
Función continua, 33
Función implícita, 33
  teorema de existencias para la, 33, 36
Funciones homogéneas, 25
  teorema de Euler sobre las, 24

"I"

Integración repetida, 77
Integral
  de línea, 99
  de superficie, 108
  doble, 75
  repetida, 77
  triple, 86

Integral de línea, 99
Integral de superficie, 108
Integral doble, 75
  transformación de una, 81-83
Integral triple, 86
  transformación de una, 89
Intervalo,
  abierto, 7
  cerrado, 7

"J"

Jacobiano, 36

"L"

Límite, 8
Longitud de una curva, 97
Lugar imagen, 45

"M"

Máximo, 58
Mínimo, 58
Momento de inercia, 75, 113
Multiplicador indeterminado, 67

"P"

Parte principal del incremento, 25
Punto crítico, 60
Punto frontera, 7
Punto múltiple, 97
Punto silla, 60
Punto singular, 46

"R"

Región, 8
Región simplemente conexa, 28, 105
Regla de la cadena, 15-17
Restricción, 67

"S"

Serie de Taylor, 55
Superficie cerrada, 108
Superficie no orientable, 108
Superficie orientable, 108

"T"

Teorema de Euler, 24
Teorema de existencia para funciones implícitas, 33, 36
Teorema de Green en el plano, 104
Teorema de Taylor, 53
  y aproximación, 57
Teorema del valor medio, 53, 55
Transformación, 44
  a coordenadas polares cilíndricas, 89
  a coordenadas polares del plano, 83
  a coordenadas polares esféricas, 89
  de una integral doble, 81-83
  de una integral triple, 89
  uno a uno, 45
Transformación inversa, 45

"V"

Variable dependiente, 8, 13
Variable independiente, 8, 12-13
Vecindad, 8
Vector tangente, 103

Esta obra se terminó de imprimir el día 29 de julio de 1974, en los talleres de Programex Editora, S. A., Comonfort 58-6, México, D. F.

La edición consta de 3 000 ejemplares y sobrantes para reposición.

FE–100

La Serie Limusa,
SELECCION DE PROBLEMAS RESUELTOS
consta de los siguientes volúmenes:

1. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
   J. Heading
2. CALCULO DE VARIAS VARIABLES
   L. Marder
3. ALGEBRA VECTORIAL
   L. Marder
4. MECANICA ANALITICA
   D. F. Lawden
5. CALCULO DE UNA VARIABLE
   K. E. Hirst
6. ALGEBRA DE NUMEROS COMPLEJOS
   J. Williams
7. CAMPOS VECTORIALES
   L. Marder
8. MATRICES Y ESPACIOS VECTORIALES
   F. Brickell
9. CALCULO DE VARIACIONES
   J. W. Craggs
10. TRANSFORMADAS DE LAPLACE
    J. Williams
11. ESTADISTICA
    A. K. Shahani y
    P. K. Nandi
12. SERIES DE FOURIER Y PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA
    W. E. Williams
13. ELECTROMAGNETISMO
    D. F. Lawden

En este volumen el lector encontrará los conceptos básicos del cálculo diferencial e integral de varias variables. El material presentado abarca las derivadas parciales, integrales múltiples, funciones implícitas, jacobianos y las integrales de línea y de superficie.

La exposición se hace desde el punto de vista de matemáticas aplicadas y los fundamentos teóricos se proporcionan sin profundizar en el análisis formal. No obstante, al seguir cuidadosamente el desarrollo de problemas de diferentes tipos, el estudiante aprecia la necesidad y conveniencia de las técnicas usadas y llega a captar el verdadero significado del cálculo.

El libro es el complemento ideal de los cursos formales de la materia que se imparten a los estudiantes de matemáticas, ciencias e ingeniería en el primero o segundo año de la carrera.

L. MARDER es Profesor Titular de matemáticas en la Universidad de Southampton y autor de varias obras sobre temas de su especialidad. Ha dedicado muchos años a la enseñanza de matemáticas a nivel profesional y la publicación de la versión inglesa de esta serie de Problemas Resueltos se debe sobre todo, a su iniciativa y gran conocimiento de las verdaderas necesidades del alumnado.

Además de la presente monografía, escribió Algebra Vectorial y Campos Vectoriales que forman parte de esta serie.